Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Оценка верхней границы относительного влияния переменных для булевых функций

Иван Грибушин Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической теории интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: ivangribushin@yandex.ru

В работе [1] дана нижняя оценка максимального значения влияния переменных булевой функции, что позволяет описать класс булевых функций, на которых достигается минимум максимального влияния переменных. В настоящей работе предложены точные верхняя и нижняя оценки максимального относительного влияния переменных для булевых функций и описан класс функций, на котором достигаются граничные значения.

Рассмотрим булеву функцию $f:\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ от n переменных. $\chi_S := \prod_{i\in S} x_i$, $\chi_\varnothing := 1$ — характеристические функции множеств $S \subseteq [n]$. Пусть x равномерно распределено на пространстве $\{-1,1\}^n$, тогда коэффициентом Фурье функции f относительно $S \subseteq [n]$ называется $\hat{f}(S) := \hat{f_S} := \mathbf{E} f(x)\chi_S(x)$. Влиянием i-ой переменной функции f называется $Inf_i(f) := \sum_{i\in S\subseteq[n]} \hat{f}(S)^2$, полным влиянием называется $Inf(f) := \sum_{i=1}^n Inf_i(f)$. В [1] было показано, что $Inf_i = \mathbf{Pr}_{x\in\{-1,1\}^n}[f(x) \neq f(x^{\oplus i})]$.

Функции f и $\tilde{f}$ называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества влияний переменных: $\{Inf_i(f) | i \in [n]\} = \{Inf_i(\tilde{f}) | i \in [n]\}$. f называется τ-регулярной для некоторого $\tau > 0$, если $\forall i \in [n]$: $Inf_i(f) \leq \tau Inf(f)$. Пусть I_f — множество, на котором $f = 1$; $k_1(f) = |I_f|$; $M_+ = \{1\} \times \{-1,1\}^{n-1}$ и $M_- = \{-1\} \times \{-1,1\}^{n-1}$ — множества, на которых $x_1 = 1$ и $x_1 = -1$ соответственно. $k_+(f) = |M_+ \cap I_f|$ и $k_-(f) = |M_- \cap I_f|$; $k'_- = \min(k_-, 2^{n-1} - k_-)$; $k'_+ = \min(k_+, 2^{n-1} - k_+)$; $k'_1(f) = k'_+(f) + k'_-(f)$.

Теорема 1. *Относительное влияние переменных любой булевой функции, зависящей существенно от n переменных, не превосходит* $(2^{n-1} - 1)/(2^{n-1} + n - 2)$. *Для функций, у которых* $k'_1 \neq 1$, *относительное влияние меньше* $(2^{n-1} - 1)/(2^{n-1} + n - 2)$.

Пусть $p = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \theta$, тогда функция $f = sign(p) : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ называется пороговой. Весом функции $f = sign(p(x))$ называется $w(f) := \sum_{i=1}^n a_i^2 + \theta^2$. Пусть $a \in \{-1,1\}^n$ — точка на булевом кубе, тогда $\delta_a(x) = \{1, \text{если } x = a; \quad -1, \text{иначе}\}$. Рассмотрим функции, у которых $k'_1 = 1$. Все они являются пороговыми. Так как для любой пороговой функции f существует эквивалентная ей монотонная пороговая функция, они эквивалентны функции вида: $x_1^\delta = x_1 + \delta_{\{-1\}\times\{1\}^{n-1}} + 1$. Обозначим класс таких функций X_1^δ.

Теорема 2. *Функции из класса* X_1^δ *имеют вес равный* $n^2 - n + 1$. *Их количество равно* $n2^{(n+1)}$.

Теорема 3. *Среди булевых функций, существенно зависящих от n переменных, равенство* $\tau = (2^{n-1} - 1)/(2^{n-1} + n - 2)$ *выполнено на функциях из* X_1^δ *и только на них.*

Источники и литература

1) J. Kahn, G. Kalai, N. Linial, The Inluence of Variables on Boolean Functions // In Proc. 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 1988, p. 68–80.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. А. Ирматову за внимание к работе и полезные обсуждения.