

Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О решётке клонов трёхзначной логики, содержащих функции $0, 1, 2, \min, \max$

Моисеев Станислав Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической теории
интеллектуальных систем, Москва, Россия

E-mail: stanislav.moiseev@gmail.com

Настоящая работа посвящена исследованию решётки L_3 всех клонов трёхзначной логики. Как известно, решётка L_3 имеет мощность континуума. Поэтому в данной работе автор сосредоточен на исследовании небольшого, но важного, фрагмента L_3 — подрешётки всех клонов, содержащих одновременно функции \min, \max и все константы $0, 1, 2$.

Теорема. Существует ровно 33 клонна трёхзначной логики, содержащих функции $0, 1, 2, \min, \max$. Решётка клонов по включению представлена на диаграмме Хассе (рис. 1). Синим цветом на диаграмме обозначены классы, сохраняющие линейный порядок $0 < 1 < 2$, и связи между этими классами и их предполными. Красным цветом — классы, сохраняющие предикат c_1 (центральный с центром 1 по классификации И. Розенберга), и связи между этими классами и их предполными. Классы, сохраняющие оба эти предиката, связи между ними и их предполными также обозначены синим.

Классы решётки описаны как классы сохранения предикатов. Множество всех функций трёхзначной логики обозначено как P_3 . Стрелки на диаграмме направлены от класса к классу, предполному в нём. Для классов, у которых ровно один надкласс, на диаграмме отображён предикат, отличающий данный класс от его надкласса. Классы, у которых два и более надкласса, тривиальным образом описываются как пересечение своих надклассов.

Нижний класс соответствует наименьшему клону, содержащему функции $0, 1, 2, \min, \max$. Предикаты, характеризующие классы решётки, можно разбить на следующие категории:

- 1) Предикаты, классы сохранения которых находятся в левой части решётки:

$$0 \sim 1 = \{22, 11, 10, 01, 00\} \quad (\text{отношение эквивалентности})$$

$$0 < 1 = \{22, 11, 01, 00\} \quad (\text{отношение частичного порядка})$$

$$(0 \sim 1) < 2 = \{22, 12, 11, 10, 02, 01, 00\} \quad (\text{отношение предпорядка})$$

- 2) Предикаты, классы сохранения которых находятся в правой части решётки:

$$1 \sim 2 = \{22, 21, 12, 11, 00\} \quad (\text{отношение эквивалентности})$$

$$1 < 2 = \{22, 12, 11, 00\} \quad (\text{отношение частичного порядка})$$

$$0 < (1 \sim 2) = \{22, 21, 12, 11, 02, 01, 00\} \quad (\text{отношение предпорядка})$$

- 3) Предикаты, классы сохранения которых находятся в центре решётки:

$$(0 < 1 < 2) = \{22, 12, 11, 02, 01, 00\} \quad (\text{линейный порядок})$$

$$c_1 = \{22, 21, 12, 11, 10, 01, 00\} \quad (\text{центральный предикат})$$

$$q_4 = \{22, 12, 11, 10, 00\} \quad (\text{частичный порядок})$$

$$q_7 = \{22, 21, 12, 11, 10, 02, 01, 00\} \quad (\text{все наборы кроме } 20)$$

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., проф. Кудрявцеву В. Б. и своему научному консультанту, к.ф.-м.н. Жуку Д. Н. за поддержку и внимание к работе.

Иллюстрации

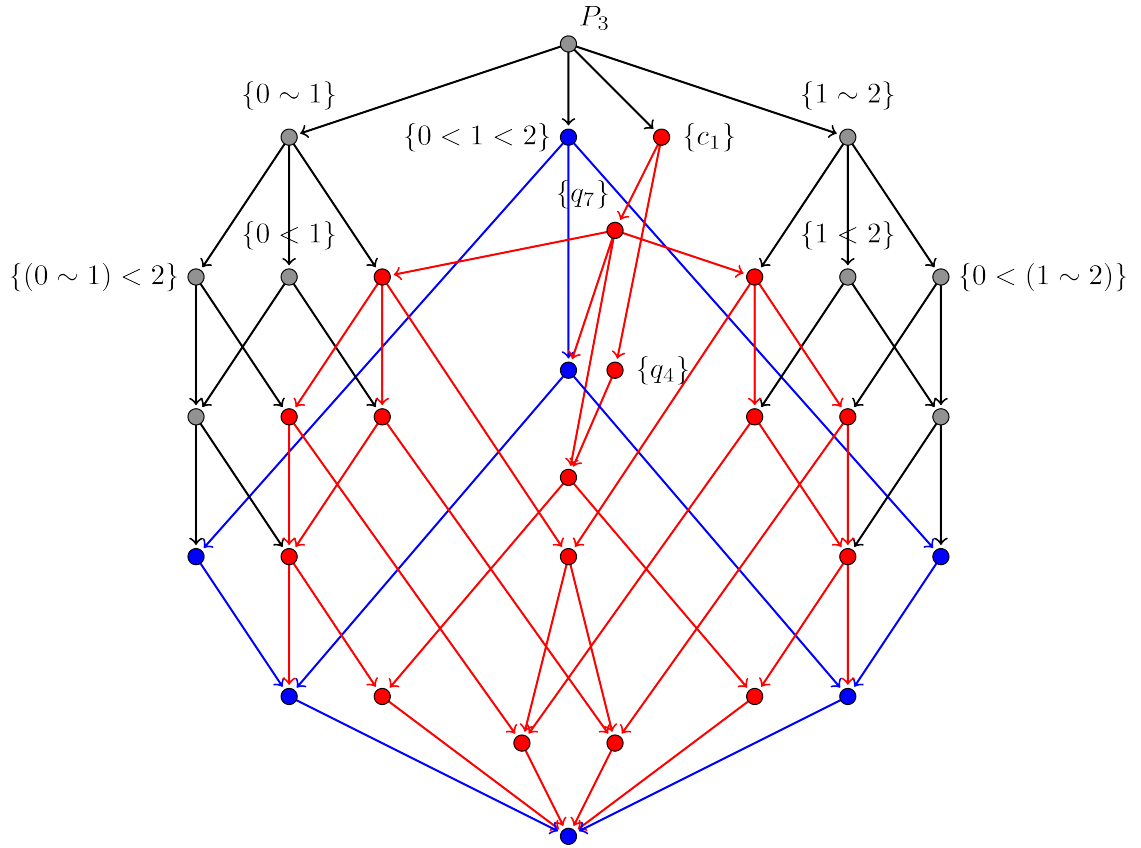


Рис. 1. Диаграмма Хассе решётки по включению всех клонов трёхзначной логики, содержащих функции $0, 1, 2, \min, \max$.