Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

**Метрические методы решения задач теории расписаний**

***Логинов Николай Александрович***

*Студент (бакалавр)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

*E-mail: na.loginov@physics.msu.ru*

Сформулируем типовую задачу (1) теории расписаний: пусть имеется $n$ требований, которые необходимо выполнить на одном приборе, и для каждого требования заданы моменты поступления $r_i$, длительности $p_i$ и директивные сроки $d_i$. Расписанием выполнения требований будем называть упорядоченное множество $\pi = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$ порядковых номеров требований, поступающих на прибор. Задача заключается в построении оптимального расписания $\pi^0$, то есть расписания, минимизирующего заданный функционал $F(\pi)$, также называющийся целевой функцией.

Совокупность $3n$ значений параметров задачи (1) будем называть примером задачи (1). Множество всевозможных примеров задачи для $n$ требований обозначим $\mathbb{T}_n$:

$$\mathbb{T}_n = \{M(p_i^M, r_i^M, d_i^M), i = \overline{1, n}\}.$$

Тогда функционал $F(\pi)$ для набора параметров $M$ можно обозначить как $F^M(\pi)$. Теперь может быть сформулирована рассматриваемая задача: пусть для каждого из $N$ заданных примеров задачи (1) $M_j, j = \overline{1, N}$ известно оптимальное расписание $\pi_j^0$, соответствующие минимуму функционала $F^{M_j}(\pi)$, получаемого из неизвестной целевой функции $F(\pi)$ для примера $M_j$. Необходимо построить оптимальное расписание $\tilde{\pi}_{N+1}^0$ для заданного примера $M_{N+1}$.

Для рассматриваемой задачи в силу произвольности неизвестного функционала не существует точного решения, поэтому правомерными оказываются только алгоритмы, строящие приближенное к оптимальному расписание. Предлагаемый метод основан на введении метрической функции $\rho(A, B) : \mathbb{T}_n \to \mathbb{R}$ в пространстве примеров задачи, удовлетворяющей условию (*): для любых примеров $A, B$ и для любого расписания $\pi$ выполнено неравенство

$$|F^A(\pi) - F^B(\pi)| \leq \rho(A, B).$$

Пусть далее $\pi^A$ и $\pi^B$ являются оптимальными расписаниями для примеров $A$ и $B$ соответственно. Тогда при выполнении условия (*) можно показать, что

$$F^A(\pi^B) - F^A(\pi^A) \leq 2\rho(A, B).$$

Таким образом, метрический подход позволяет оценить абсолютную погрешность значения целевой функции в примере $A$ при применении расписания, оптимального для примера $B$. Для рассматриваемой задачи этот факт полезен по следующей причине: найдя среди примеров $M_j$ с известными оптимальными расписаниями $\pi_j^0$ пример с наименьшим расстоянием (в построенной метрике) $\rho(M_j, M_{N+1})$допримераM$_{N+1}$, мы получим приближенное к оптимальному расписание с абсолютной величиной погрешности значения целевой функции. Именно эта особенность и выделяет метрический подход среди прочих методов решения данной задачи.

Несмотря на то, что функция метрики порождается целевой функцией, для некоторых классов целевых функций оказывается возможным построение метрики, не зависящей от параметров целевой функции. В работе рассмотрен один из таких классов, а именно, построены и исследованы метрические функции для задачи о суммарном взвешенном запаздывании.

### Источники и литература

1) Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Метрики в задачах теории расписаний // Доклады Академии наук. 2010. Т.432, №6. С. 746-749

### Слова благодарности

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору А.А. Лазареву за внимание и всестороннюю помощь в работе.