Вращающиеся волны в модели нелинейной оптической системы с запаздыванием

Будзинский Станислав Сергеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: stanislav.budzinskiy@protonmail.ch

Самоорганизация — процесс упорядочения в открытой системе, обусловленный согласованным взаимодействием составляющих её элементов — наблюдается в различных областях естествознания: в качестве примера можно привести рост кристаллов, химическую реакцию Белоусова–Жаботинского, роевые оптимизационные алгоритмы и многое другое. В частности, самоорганизация встречается в нелинейной оптике.

Типичная оптическая система, обладающая богатой пространственно-временной динамикой, состоит из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и контура обратной связи [1]. Динамика такой системы описывается с помощью функции $u(\mathbf{r}, t)$, представляющей собой фазовую модуляцию в тонком слое нелинейной керровской среды в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющей нелинейному уравнению диффузии

$$u_t(\mathbf{r}, t) + u(\mathbf{r}, t) = d\triangle u(\mathbf{r}, t) + |A_{FB}|^2, \quad \mathbf{r} \in S, \quad t > 0. \tag{1}$$

Здесь d — коэффициент диффузии возбуждения молекул нелинейной среды; A_{FB} — амплитуда светового пучка после прохождения контура обратной связи.

В зависимости от конфигурации контура обратной связи выражение для амплитуды A_{FB} может привносить в уравнение (1) как нелокальность по времени (запаздывание), так и нелокальность по пространственным переменным (например, поворот или отражение). Величины, характеризующие эти нелокальности, наряду с интенсивностью входного светового пучка представляют собой эффективные средства управления динамикой системы.

В работе [2] исследовалась модель с запаздыванием и поворотом, не учитывающая явление дифракции при свободном распространении светового пучка в контуре обратной связи. Авторы показали, что при должном выборе параметров модели уравнение (1) имеет решения вида вращающихся волн.

Целью моей работы было показать, что если в модели учитывать дифракцию светового пучка, то нелокальности по времени достаточно для возникновения устойчивых вращающихся волн. Для доказательства существования бифуркационных волн производится переход во вращающуюся систему координат, в которой задача сводится к построению непостоянного решения обыкновенного функционально-дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Оно найдено с помощью теоремы о неявном операторе, и посчитаны старшие коэффициенты разложения по малому параметру. Для исследования устойчивости бифуркации Андронова-Хопфа построена нормальная форма функционально-дифференциального уравнения на двумерном центральном многообразии [3,4]. Устойчивость определяется знаками старших коэффициентов нормальной формы, которые выражаются через параметры исходной задачи. Результаты численного моделирования подтверждают выводы аналитического исследования.

Литература

1. Vorontsov M. A., Firth W. J. Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49, № 4. P. 2891–2906.
2. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 11. С. 1804–1821.
3. Faria T. Normal forms for semilinear functional differential equations in Banach spaces and applications. Part II // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2000. Vol. 7, № 1. P. 155–176.
4. Van Minh N., Wu J. Invariant manifolds of partial functional differential equations // Journal of Differential Equations. 2004. Vol. 198, № 2. P. 381–421.