Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Об оценках длин тестов для функциональных элементов при большом числе допустимых неисправностей

Попков Кирилл Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия
E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний функциональных элементов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении произвольных схем из заданных функциональных элементов с последующим "прозваниванием" этих схем, т. е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами. Суть общепринятой математической модели схемы из функциональных элементов и тех элементов, из которых строятся эти схемы, с исчерпывающей полнотой и ясностью представлена в [1]; именно такая математическая модель является объектом исследования и рассматривается ниже. Постановка задач проверки исправности и диагностики состояний N функциональных элементов, каждый из которых в исправном состоянии реализует заданную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и среди которых не более чем k неисправных, при произвольных константных неисправностях на выходах элементов описана в [2].

Диагностическим тестом назовём такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние каждого из N элементов. Число l назовём *длиной* этого теста. (Здесь используется терминология, общепринятая для диагностики управляющих систем: см., например, [3].)

Проверяющим тестом назовём такой набор схем $S_1, \ldots, S_l$, составленных из заданных функциональных элементов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить исправность или неисправность каждого из N элементов. Число l назовём *длиной* этого теста.

Отметим, что проверяющий тест, в отличие от диагностического, не обязан определять тип неисправности (0 или 1) каждого неисправного элемента.

Введём функции $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$, равные длинам самого короткого, соответственно, проверяющего и диагностического тестов для N функциональных элементов, среди которых не более чем k неисправных (в исправном состоянии каждый элемент реализует функцию f).

Отметим, что для любых f, N и k выполняется соотношение $L_d(f, N, k) \geqslant L_c(f, N, k)$, поскольку любой диагностический тест, очевидно, является проверяющим.

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины N всегда можно взять множество из N схем, каждая из которых представляет собой один из заданных функциональных элементов. Отсюда и из теоремы 1 [2] для любых f, N и k следуют оценки

$$k \leqslant L_c(f, N, k) \leqslant N, \tag{1}$$

$$k \leqslant L_d(f, N, k) \leqslant N. \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема, позволяющая улучшить нижние оценки для функций $L_c(f, N, k)$ и $L_d(f, N, k)$ в (1) и (2) и приблизить их к верхним в случае, когда максимальное допустимое число неисправных элементов

(k) близко к числу всех элементов (N). (Через n обозначается число входов каждого из заданных функциональных элементов.)

Теорема 1. *Пусть* $k > \frac{2n}{2n+1}N$. *Тогда* $L_c(f,N,k) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k-2nN+3n}\right) N$ *и* $L_d(f,N,k) \geqslant \left(1 - \frac{n}{(2n+1)k-2nN+3n}\right) N$.

Замечание 1. Оценки теоремы 1 действительно во многих случаях являются улучшением нижних оценок для функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в (1) и (2). Например, если выполнены следующие условия:

1) $0 < a_1 < a_2 < 1$,

2) $b > 1$,

3) $N \geqslant \frac{2bn^2+(3a_2+b-3)n}{\min(a_1(1-a_1),\, a_2(1-a_2))}$,

то в качестве следствия из теоремы 1 можно получить, что для каждого $k \in [\frac{2n+a_1}{2n+1}N; \frac{2n+a_2}{2n+1}N]$ выполняются оценки $L_c(f,n,k) \geqslant ck$ и $L_d(f,n,k) \geqslant ck$, где $c = c(n,a_2,b) > 1$ и не зависит от выбора числа k из указанного отрезка. Таким образом, при выполнении условий 1)–3) и принадлежности k отрезку $[\frac{2n+a_1}{2n+1}N; \frac{2n+a_2}{2n+1}N]$ теорема 1 позволяет улучшить нижнюю оценку для функций $L_c(f,N,k)$ и $L_d(f,N,k)$ в (1) и (2) в $c > 1$ раз.

Источники и литература

1) Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 139 с.

2) Попков К. А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для функциональных элементов // Дискретный анализ и исследование операций, том 21, № 6, 2014. С. 73-89.

3) Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 191 с.

Слова благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.