Секция «Математика и механика»

Оценка числа слоев в разбиении множества точек плоскости

Плетнев Александр Андреевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: PletnevOrel@rambler.ru

В [1] рассматривалась двумерная задача интервального поиска. Для ее решения было введено понятие поперечного и продольного слоя на плоскости и доказаны необходимые для решения задачи верхние оценки количества этих слоев. Здесь предлагается более точная верхняя оценка, а так же приводится нижняя оценка числа слоев в разбиении множества точек плоскости.
На множестве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ введем отношение ''$\leq$'' следующим образом:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \& y_1 \leq y_2.$$

Скажем, что пара точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *сравнима*, если $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$, в противном случае эта пара точек называется *несравнимой*. Множество точек $S \subseteq \mathbb{R}^2$ назовем *поперечным (продольным) слоем*, если любая пара точек из S не сравнима (сравнима). Множество точек $S \subseteq \mathbb{R}^2$ назовем *слоем*, если S поперечный или продольный слой.
Пусть множество $M \subseteq \mathbb{R}^2$ и количество элементов в M равняется k. Разобьем это множество на слои $S_1, S_2, \ldots, S_p$, то есть $M = \bigsqcup_{i=1}^{p} S_i$. Выберем такое разбиение на слои множества M, чтобы в нем содержалось наименьшее количество слоев, и обозначим это число через $p_{\min}(M)$. Рассмотрим все множества $M \subseteq \mathbb{R}^2$ состоящие из k элементов и выберем среди них максимальное значение $p_{\min}(M)$, обозначим это значение через $N(k)$, то есть

$$N(k) = \max\{p_{\min}(M) : M \subseteq \mathbb{R}^2, |M| = k\}.$$

Верна следующая теорема.
Теорема. *Для любого натурального k, $k > 9$, выполнено*

$$\sqrt{k} \leq N(k) \leq 2\sqrt{k-1} - 1.$$

Список литературы

[1] Гасанов Э.Э., Ерохин А.Н. Линейный по памяти не переборный алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска // Дискретная математика (2004), том 16, выпуск 4, страницы 49-64.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.