Секция «Математика и механика»

Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел

Крупицын Евгений Станиславович
Аспирант
Московский педагогический государственный университет, Математический факультет, Москва, Россия
E-mail: krupitsin@mail.ru

Оценки многочленов от некоторых полиадических чисел

Обозначим $\mathbb{Z}_\tau$ – кольцо целых чисел с топологией τ, в которой идеалы (m) задают полную систему окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел [1], [2]. На этом кольце вводится расстояние ([1], [3]):

$$\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_m(x,y)}{2^m}, \tag{1}$$

где

$$\delta_m(x,y)=\begin{cases}0, \&\text{если } x\equiv y \pmod m,\\ 1, \&\text{если } x\not\equiv y \pmod m.\end{cases} \tag{2}$$

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in\mathbb{Z}$ называется фундаментальной, если для любого $K\in\mathbb{N}$ существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $m,m>N$ имеет место сравнение $x_m\equiv x_n \pmod{K!}$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется нулевой последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$. Фундаментальные последовательности называются эквивалентными, если их разность является нулевой последовательностью.

Полиадическим числом [1], [3] называется класс эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Пополнение $\mathbb{Z}_\tau$ приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$, называемому кольцом целых полиадических чисел. Это кольцо можно метризовать следующим образом. Пусть $\mathfrak{a}\in\mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{\alpha_k\}$, а $\mathfrak{b}\in\mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{\beta_k\}$. Положим, по определению (см. [1], [4]), полиадическое расстояние $\rho(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ равным

$$\rho(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\lim_{k\to\infty}\rho(\alpha_k,\beta_k). \tag{3}$$

Вопросами оценки линейных форм и многочленов от совокупности полиадических чисел посвящена работа В.Г. Чирского [5].

Рассмотрим полиадическое число

$$\mathfrak{a}=\sum_{l=1}^{\infty}a_l n_l!, \tag{4}$$

где $a_l\in\mathbb{N}, n_l$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\mathfrak{a}_k=\sum_{l=1}^{k}a_l n_l!\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Пусть $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ – все простые числа, занумерованные в порядке возрастания. Пусть $P(x) \not\equiv 0$ – многочлен с целыми коэффициентами высоты H и степени d. Пусть $\mathfrak{a}$ – полиадическое число вида (**??**), удовлетворяющее условиям: для любого C существует число $k_0(C)$ такое, что для любого $k \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$n_{k+k_0(C)+1} > \frac{p_k - 1}{\ln p_k}\left(\ln n_{k+k_0(C)+1} + C + \ln \mathfrak{a}^d_{k+k_0(C)}\right).$$

Пусть $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0(d, H)$ определено в равенстве

$$\mathcal{K}_0 = \max\left(k_1(H), k_0(\ln(d+1)H)\right).$$

Тогда полиадическое расстояние $\rho(P(\mathfrak{a}), 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(P(\mathfrak{a}), 0) \geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{1}{2^m},$$

где $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$, а множество $\mathcal{M}_k$ состоит из натуральных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел $p_l^{r(l,d,H)}$, $l = 1, \ldots, k$, где $r(l, d, H) = [\log_{p_l}(d+1)H(\mathfrak{a}_{l+\mathcal{K}_0})^d] + 1$. Пусть

$$\mathfrak{a}_i = \sum_{l=1}^{\infty} a_{i,l} n_{i,l}!, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\mathfrak{a}_{i,k} = \sum_{l=1}^{k} a_{i,l} n_{i,l}!, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $a_{i,l} \in \mathbb{N}$. Пусть для любых $C, D_1, \ldots, D_m$ существует число $k_0 = k_0(C, D_1, \ldots, D_m)$ такое, что для всех $i = 1, \ldots, m$ имеем

$$n_{k+k_0+1,i} - \log_{p_k} n_{k+k_0+1,i} >$$
$$\frac{p_k - 1}{\ln p_k}\left(\ln C + \sum_{j=1}^{m} \ln(D_j + 1) + \sum_{j=1}^{m} D_j \ln(\mathfrak{a}_{k+k_0})\right).$$

Пусть, кроме того, существует $k_1 = k_1(C, D_1, \ldots, D_m)$ такое, что если $k \geqslant k_1$, то

$$\mathfrak{a}_{k,1} > C + 1,$$
$$\mathfrak{a}_{k,2} > C(D_1 + 1)(\mathfrak{a}_{k,1})^{D_1},$$
$$\ldots$$
$$\mathfrak{a}_{k,m} > C(D_{m-1} + 1)(\mathfrak{a}_{k,m-1})^{D_m - 1} + 1.$$

Тогда для любого многочлена $P(\overline{x}) = P(x_1, \ldots, x_m) \not\equiv 0$, степени d_i по переменной x_i и высоты H при

$$\mathcal{K}_0 = \max\left(k_0(H, d_1, \ldots, d_m), k_1(H, d_1, \ldots, d_m)\right)$$

имеет место равенство

$$\rho(\overline{\mathfrak{a}}, 0) \geqslant \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{1}{2^m},$$

где $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$, а множество $\mathcal{M}_k$ состоит из натуральных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел $p_l^{r(l,d_1,\ldots,d_m,H)+1}$, $l = 1, \ldots, k$, где

$$r(l, d_1, \ldots, d_m, H) = \left[\log_{p_i}\left(H \cdot \prod_{j=1}^{m} (d_j + 1)(\mathfrak{a}_{l,j})^{d_j}\right)\right] + 1.$$

Список литературы

[1] Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Наука, 1971.

[2] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984.

[3] Новосёлов Е.В. Топологическая теория делимости целых чисел. //Учён. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та. – №3. – 1960. – С. 3 – 23.

[4] Новосёлов Е.В. Введение в полиадический анализ. – Петрозаводск, 1982, – 112 с.

[5] Чирский В.Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел. //Чебышевский сборник.– 2011. – №4.