Секция «Математика и механика»

Различные варианты $alpha$-нулевых множеств и их сравнение.

Андреев Михаил Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: amishaa@mail.ru

Эффективная хаусдорфова размерность точки в канторовском пространстве Ω (=бесконечной последовательности нулей и единиц) определяется следующим образом [**?**]: Для данного $\alpha \in (0,1)$ будем называть точку α-нулевой, если существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, сумма α-длин которых не превосходит ε. Интервалами в канторовском пространстве называются множества вида $x\Omega$ (множество последовательностей, имеющих данное начало x). α-длина такого интервала определяется как $2^{-\alpha|x|}$, где $|x|$ — длина двоичного слова x. Эффективной размерностью точки x называется нижняя грань тех α, при которых x является α-нулевой. Есть два различных подхода к измерению α-размеров семейств интервалов [**?**][**?**]. Кроме описанной выше суммы α-длин интервалов рассматривают супремум по всем префиксно-корректным подсемействам (=никакие два интервала в подсемействе не пересекаются) суммы α-длин интервалов, входящих в это подсемейство. Если заменить в определении α-нулевых последовательностей один подход на другой, то получается определение строгих α-нулевых множеств. Третим подходом к α-нулевым последовательностям является подход Соловея[**?**], при котором последовательность является α-нулевой (по Соловею), если она бесконечное число раз покрывается перечислимым семейством интервалов, сумма α-длин которых ограничена. В четветом подходе [**?**] нулевые последовательности — это те последовательности, которые являются неслучайными относительно класса α-емких мер, т.е. существует алгоритм, который по рациональному $\varepsilon > 0$ указывает покрытие этой точки перечислимым семейством интервалов, у которых по любой α-емкой мере суммарная мера не превосходит ε (подробнее о случайности относительно классов мер см. [**?**]). Мера μ на Ω называется α-емкой, если $\mu(x\Omega) \leq 2^{-\alpha|x|}$ для всех слов x. Серия теорем в работах [**?**][**?**] устанавливает взаимоотношения между этими четырьмя различными подходами к α-нулевым множествам. А именно, любая α-нулевая последовательность является α-нулевой по Соловею, любая α-нулевая по Соловею является сильно α-нулевой, сильно α-нулевые последовательности в точности совпадают с последовательностями случайными относительно класса α-емких мер, и, при $\alpha < 1$ все включения строгие. В моей работе была существенно проще доказана последняя эквивалентность, за счет чего так же удалось упростить переход от случайности по Соловею к строгой случайности и несколько увеличить общность этого перехода.

Список литературы

[1] Биевеню Л. Алгоритмические тесты и случайность относительно классов мер / Л. Биенвеню, П. Гач, М. Хойруп, К. Рохас , А. Шень // Труды математического института им. Стеклова, 2011, т.274, с.1 – 62.

[2] Успенский В.А., Верещагин Н.К., Шень А.Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность – М.: МЦНМО, 2012

[3] Reimann J. Effectively closed set of measures and randomness

[4] Stephan F, Reimann J. Hierarchies of randomness tests