Секция «Математика и механика»

О росте в среднем матричной функции Эйлера

Байгушев Данила Александрович
Школьник
Лицей «Вторая школа», , Москва, Россия
E-mail: IDanila24@gmail.com

В работе [1] было предложено обобщение функции Эйлера $\varphi(m) := |\mathbb{Z}_m^*|$ на случай матриц. А именно, рассмотрим вместо кольца $\mathbb{Z}_m$ кольцо $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{Z}_m)$ матриц размера 2×2 с элементами из $\mathbb{Z}_m$, а вместо $\mathbb{Z}_m^*$ рассмотрим множество $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_m)$ обратимых матриц.

Определение 1. *Матричной функцией Эйлера* назовем функцию $\Phi(m) := |\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_m)|$.

В работе [1] были изучены основные свойства матричной функции Эйлера.

Теорема 1. *Матричная функции Эйлера Φ обладает следующими свойствами*:
1) *Если p — простое, то*

$$\Phi(p^k) = p^{4k}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big).$$

В частности, при $k = 1$ имеем

$$\Phi(p) = p(p-1)(p^2-1).$$

2) *Функция Φ мультипликативна*: *если* НОД$(a, b) = 1$, *то*

$$\Phi(ab) = \Phi(a) \cdot \Phi(b).$$

3) *Если $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ — разложение на простые, то*

$$\Phi(m) = m^4\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_1^2}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{1}{p_n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_n^2}\Big).$$

Целью данной работы является изучение вопроса о росте матричной функции Эйлера, поставленного В.И. Арнольдом в [2].

Нам потребуется следующее

Определение 2. Будем говорить, что функция f *растёт в среднем* так же, как функция g (обозначение $f \stackrel{\frown}{\sim} g$), если

$$\frac{f(1) + \ldots + f(m)}{g(1) + \ldots + g(m)} \to 1 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Для функции Эйлера хорошо известно, что $\varphi(m) \stackrel{\frown}{\sim} \frac{m}{\zeta(2)}$ (см. [3]).

Основным результатом данной работы является доказательство гипотезы о росте в среднем матричной функции Эйлера, высказанной в [1].

Теорема 2. *Имеет место следующая асимптотика*:

$$\Phi(m) \mathrel{\widehat{\approx}} \frac{m^4}{\zeta(2)\cdot\zeta(3)},$$

где ζ *— дзета-функция Римана.*

Также в [1] была введена *вторая матричная функция Эйлера* $\Phi'(m) := |\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}_m)|$ (количество матриц с определителем 1). Можно доказать, что $\Phi(m) = \varphi(m)\cdot\Phi'(m)$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Имеет место следующая асимптотика*:

$$\Phi'(m) \mathrel{\widehat{\approx}} \frac{m^3}{\zeta(3)}.$$

Литература

1 Д. А. Байгушев, “О матричной функции Эйлера” // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского, т. 45, с. 12–14, 2012.

2 В. И. Арнольд, “Перестановки” // Успехи математических наук, т. 64, вып. 4 (388), с. 3–44, 2012.

3 В. И. Арнольд, “Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий”. М.: МЦНМО, 2003.

Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя П. В. Бибикова за внимание к работе.