Секция «Математика и механика»

Трехмерное обобщение теоремы Гекке.

Абросимова Альбина Андреевна
Аспирант
Владимирский государственный университет, Физико-математический факультет, Владимир, Россия
E-mail: Pincet88@mail.ru

E. Hecke в 1921 г. построил первый пример BR – множеств(bounded remainder set). Он доказал, что интервалы I длины $a+b\alpha$, где $a,b\in\mathbb{Z}$, являются интервалами ограниченного остатка и для них справедлива оценка остаточного члена $|\delta(\alpha,i,I)|\leq|b|$. Полное описание всех одномерных BR – множеств нашел H. Kesten. Более сложной является задача о BR – множествах в многомерном случае. Были сделаны попытки описать многомерные случаи в работах P. Liardet и G. Rauzy, но получить явных оценок остаточного члена так и не удалось. Впервые частный случай для двумерных торов был рассмотрен в 1954 г. R. Szüsz. Для произвольной размерности описание многомерных BR – множеств было сделано В. Г. Журавлевым в [2]. Автор в [1] построил и получил точные оценки остаточного члена $\delta_k, k=0,1,2$ для двумерных BR – множеств, построенных на основе выпуклой и не выпуклой шестиугольной развертки $\mathrm{T}^2(c)$ тора $\mathbb{T}^2$, сдвигаемого на иррациональный вектор $\alpha=tc$, где $c=(c_1,c_2)$ – параметр определяющий форму развертки, $t\leq 1$, а также определил средние значения отклонений. Для построения трехмерных BR — множеств автор использует произведение торических разверток [3], в данном случае – произведение шестиугольной развертки $T^2(c)$ и перекладывающегося полуинтервала T^1. Построены классы множеств $T_1^3, T_{0,0}^3$, геометрически являющиеся шестиугольными призмами, и $T_{0,1}^3 T_{0,2}^3$ – параллелепипедами. Для них получены точные оценки остаточных членов $\delta_1, \delta_{0,m}, m=0,1,2$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор, разбиение которого на области $T_1^3\sqcup T_{0,0}^3\sqcup T_{0,1}^3\sqcup T_{0,2}^3$ задается произведением $T^1\otimes_0 T^2(c)$, и пусть задан иррациональный вектор γ сдвига тора $\mathbb{T}^3$. Тогда для отклонений справедливы следующие точные неравенства:*

$$-\sigma(x_0)\leq\delta_{0,0}(i,x_0)\leq 3-\sigma(c)(t+1)-\sigma(x_0),\ x_{01}-1\leq\delta_1(i)\leq x_{01},$$
$$x_{02}-1\leq\delta_{0,1}(i,x_0)\leq x_{02}+\alpha_1^2+c_1,\ x_{03}-1\leq\delta_{0,2}(i,x_0)\leq x_{03}+\alpha_2^2+c_2,$$

где $\sigma(x)$ – функция, равная сумме координат точки x.

Данная теорема является многомерным обобщением теоремы E. Hecke на случай трехмерных торов. Аналогичные результаты доказаны для случая не выпуклой шестиугольной развертки.

Литература

1. Абросимова А. А., Множества ограниченного остатка на двумерном торе.// Чебышевский сборник. 2011.Т. 12.Вып.4(40).С.15-23.

2. Журавлев В. Г., Многомерное обобщение теоремы Гекке.// Алгебра и анализ, 2012, том 24, вып. 1, С. 1-33.

3. Журавлев В. Г.,Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 392. С. 95 - 145.