

**Секция «Математика и механика»**

**Естественные дифференциальные операторы на тензорных полях.**

**Пунинский Евгений Геннадьевич**

*Аспирант*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,*

*Механико-математический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: puninskiy@mail.ru*

Не вдаваясь в формальные подробности, можно сказать, что естественный дифференциальный оператор на тензорных полях — это отображение, переводящее тензорное поле в тензорное поле, локальное описание которого не зависит от выбранной системы координат на многообразии. В курсе дифференциальной геометрии такие операции называются тензорными.

Широко известными примерами являются операция внешнего дифференцирования и операция ковариантного дифференцирования. Также стоит отметить тождество Якоби для кососимметричных тензоров типа  $(2, 0)$ . Чуть менее известен пример тензора Нийенхейса, который задает оператор  $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$  по формуле  $R \mapsto N_R$ , где  $N_R(X, Y) = [RX, RY] + R^2[X, Y] - R[RX, Y] - R[X, RY]$ ,  $R$  — тензор типа  $(1, 1)$ , а  $X, Y$  — векторные поля.

Изучение естественных операторов оправдано прежде всего тем, что все известные примеры обязательно находили применение в тех или иных разделах дифференциальной геометрии. Так, тензор Нийенхейса отвечает за интегрируемость почти комплексной структуры на многообразии, в то время как тождество Якоби выделяет тензоры Пуассона из всевозможных кососимметричных тензоров типа  $(2, 0)$ . В [2] собраны все значимые результаты о естественных операторах на 1993 год. С тех пор работа в данном направлении несколько приостановилась. Впрочем необходимо упомянуть работы [1, 3].

Многую, следуя методам, изложенным в [1], описаны всевозможные естественные операторы  $(1, 1) \otimes (1, 1) \rightarrow (1, 2)$  и, как следствие, широкий класс операторов  $(1, 1) \rightarrow (1, 2)$ . Кроме того, получены результаты для операторов  $(2, 0) \otimes (2, 0) \rightarrow (3, 0)$ , а также исследованы операторы  $(q, 0) \rightarrow (q + 1, 0)$ .

**Литература**

1. Кацыло П.И., Тимашев Д.А. Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход // Матем. сб., М.: 2008, Т. 199. No. 10. С. 63-86.
2. Kolar I., Michor P.W., Slovák J. Natural Operations in differential geometry // Springer-Verlag, Berlin, 1993
3. Markl M. Natural differential operators and graph complexes // Differential Geom. Appl. 27 (2009), 257-278, ссылка: <http://arxiv.org/pdf/math/0612183v2.pdf>

**Слова благодарности**

Благодарю своего научного руководителя, акад. РАН Фоменко А.Т., а также к.ф.-м.н. Коняева А.Ю. за ценные замечания и советы.