Секция «Математика и механика»

О комплексных гиперповерхностях фиксированной степени с особенностями специального вида

Асташов Евгений Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ast-ea@yandex.ru

Определение 1 *Пусть* $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *— непрерывная функция. Говорят, что поверхность* $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ *имеет в точке* $a \in \mathbb{C}^n$ *особенность типа* $\mathcal{A}_k$*, если в некоторой окрестности этой точки существует локальная система координат* $x_1, \ldots, x_n$*, в которой функция* f *имеет вид*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k+1} + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

В данной работе изучается вопрос о том, какие особенности типа $\mathcal{A}_k$ могут иметь гиперповерхности фиксированной степени d в $\mathbb{C}^n$.

Определение 2 *Через* $k_n(d)$ *мы будет обозначать наибольшее из таких* $k \in \mathbb{N}$*, для которых существует гиперповерхность степени* d *в* $\mathbb{C}^n$ *с особенностью типа* $\mathcal{A}_k$ *в какой-либо точке.*

В работе [2] доказаны следующие два утверждения.

Утверждение 1

$$k_2(d) \le (d-1)^2 - \left[\frac{d}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{d}{2}\right] - 1\right).$$

Утверждение 2 *Для любого* $s \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ *существует плоская кривая степени* $28s + 9$ *с особенностью типа* $\mathcal{A}_k$*, где* $k = 420s^2 + 269s + 42$.

Утверждения 1 и 2 дают, соответственно, верхнюю и нижнюю асимптотическую оценку величины $k_2(d)$ при $d \to \infty$, а именно:

Следствие 1

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{k_2(d)}{d^2} \le \frac{3}{4}.$$

Следствие 2

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k_2(d)}{d^2} \ge \frac{15}{28}.$$

В работе [1] результат Следствия 2 усилен соедующим образом:

Утверждение 3

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k_2(d)}{d^2} \ge \frac{112}{209} > \frac{15}{28}.$$

Мы обобщим утверждение Утверждения 3 на случай произвольной размерности следующим образом:

Теорема 1 *Для любого натурального $n \geq 2$ имеет место неравенство*

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{k_n(d)}{d^n} \geq \frac{112}{209} \cdot \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Литература

1. Асташов Е. А. Алгебраические кривые фиксированной степени со сложными особенностями. "Дни студенческой науки. Весна-2011" Сборник научных трудов — М.: МЭСИ, 2011. с.28-38. (ISBN 978-5-7764-0686-7)

2. Гусейн-Заде С. М., Нехорошев Н. Н. Об особенностях типа $\mathcal{A}_k$ на плоских кривых фиксированной степени. Функциональный анализ и его прил., т. 34, вып. 3. М., 2000. С. 69-70.