Об определении сильно-сингулярного решения обобщения системы уравнений хроматографии

Григорьева Анастасия Олеговна
Студент
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Строительный, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mf1992@mail.ru

Известно, что некоторые системы законов сохранения обладают решениями, компоненты которых могут содержать дельта функции Дирака. Для того, чтобы решить задачу Коши для них, приходится вводить решения типа δ-ударных волн [1]. Такие решения называются сильно-сингулярными. Самая известная из таких систем - система газовой динамики "без давления"

$$\rho_t + \nabla(\rho u) = 0, \qquad (\rho u)_t + \nabla(\rho u \otimes u) = 0, \tag{1}$$

для плотности $\rho(t,x)$ и скорости $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, которая получается из обычных уравнений газовой динамики в предельном переходе при стремящемся к нулю давлении [2]. Однако сильно-сингулярными решениями обладают и другие важные для физики системы уравнений. Например, в [5] введена система

$$((u_j) + (u_j f_j(\mu_1 u_1 + ... + \mu_n u_n))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где f_j-гладкие функции, μ_j – константы, $j = 1, 2, ..., n$. Как отмечено в [5], в частном случае

$$f_j(u_1 + ... + u_n) = 1 + \frac{a_j}{1 + u_1 + ... + u_n}$$

отсюда получается так называемая система нелинейной хроматографии (хроматография — специальный раздел химии, посвященный изучению переноса молекул или частиц в системе несмешивающихся и движущихся друг относительно друга фаз). В [3] на физическом уровне строгости показано, что система законов сохранения

$$\left(u + \frac{a_1 u}{(1 - u + v)}\right)_t + u_x = 0, \qquad \left(v + \frac{a_2 v}{(1 - u + v)}\right)_t + v_x = 0$$

допускает решения типа δ-ударной волны, в [4] получено экспериментальное подтверждение этому. В [6] предложена схема того, как обобщенное решение задачи Коши для (2) может быть введено методом слабых асимптотик [1]. Мы реализуем эту идею и вводим интегральное тождество, дающее определение сильно-сингулярного обобщенного решения задачи Коши, и получаем условия Ранкина-Гюгонио на сингулярном фронте.