Секция «Математика и механика»

О ляпуновской эквивалентности систем с возмущениями

Залыгина Валентина

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: vizalygina@mail.ru

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{M}^n$ линейное пространство матриц $n \times n$ с нормой $\|A\| = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$, а через $\mathcal{M}^n$ — множество линейных систем вида $\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$, с кусочно-непрерывной (не обязательно ограниченной) матричной функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$, которую будем отождествлять с соответствующей системой.

Определение. (ср. [1]) Система $A \in \mathcal{M}^n$ ляпуновски приводима к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует непрерывная кусочно-дифференцируемая матричная функция $L\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{M}^n$ такая, что:

$$\det L(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$
$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left(\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| \right) < +\infty,$$
$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Введенное отношение (ляпуновской приводимости) является отношением эквивалентности [3], которую будем называть ляпуновской. Для заданной непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ обозначим через $\mathcal{M}^n_f$ множество систем $A \in \mathcal{M}^n$, удовлетворяющих при всяком $t \in \mathbb{R}^+$ условию

$$\|A(t)\| \le f(t).$$

Если функция f есть константа K, то условимся писать $\mathcal{M}^n_K$ вместо $\mathcal{M}^n_f$.

Теорема. Для всякой непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ найдется такая последовательность вещественных чисел, что для всяких числа $K > 0$ и системы $B \in \mathcal{M}^n_K$ существует кусочно-постоянная система $\tilde{B} \in \mathcal{M}^n$ с разрывами разве что в точках указанной последовательности, удовлетворяющая следующим условиям:

1) элементы $\tilde{B}$ принимают лишь значения $\pm K$;
2) для всякой системы $A \in \mathcal{M}^n_f$ системы $A + B$ и $A + \tilde{B}$ ляпуновски эквивалентны.

В доказательстве теоремы использована теорема 1 из [2].

Литература

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. Москва: Наука, 1966. 576 с.
2. Изобов Н.А., Мазаник С.А. Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях. // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №2. С. 168-173.
3. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111-166.