Секция «Математика и механика»

Большая теорема Понселе и инвариантные меры на кониках

Авксентьев Евгений Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: avksentjev@mail.ru

Теорема Понселе[5] представляет собой альтернативу, согласно которой вписано-описанная ломаная двух коник либо замыкается для любой, либо не замыкается ни для какой начальной точки, причем в случае замыкания число звеньев всегда одинаковое. Большой теоремой Понселе называют[1] обобщение теоремы Понселе на пучки коник[4]: **Теорема** *Пусть коники $\alpha, \beta_1, \ \ldots, \beta_n$ принадлежат одному пучку. Тогда если существует многоугольник, вписанный в конику α и описанный около коник $\beta_1, \ldots, \beta_n$, то таких многоугольников существует бесконечно много. Для определения такого многоугольника можно произвольным образом задать:*

- (i) *порядок касания его сторон с кониками $\beta_1, \ldots, \beta_n$; например, такой: $\beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)}$, где σ – подстановка множества $\{1, \ldots, n\}$;*
- (ii) *касательную к конике $\beta_{\sigma(1)}$, содержащую одну из сторон этого многоугольника;*
- (iii) *точку пересечения этой касательной с коникой α, которая будет принадлежать стороне, касающейся коники $\beta_{\sigma(2)}$.*

Идея использовать некоторый инвариант для доказательства теоремы Понселе восходит еще к Якоби и Бертрану (подробнее см.[6]). Кинг[3] с использованием инвариантной относительно отображения Понселе меры получил короткое и очень красивое доказательство теоремы Понселе, однако, только для одного случая двух непересекающихся эллипсов, один из которых лежит внутри другого. В других случаях взаимного расположения коник нарушается последовательность обхода вершин ломаных Понселе, отчего конструкцию Кинга не получается применить. В статье[2] с помощью другой конструкции, использующей гомеоидную плотность, эти трудности удалось устранить. Мы распространим конструкцию Кинга инвариантной меры на пучки коник. Докажем, что для пучка коник существует универсальная мера, которая инвариантна относительно отображения Понселе на каждой конике этого пучка. С использованием этой меры получено новое доказательство Большой теоремы Понселе. Мы также приведем полное описание инвариантных борелевских мер.

Литература

1. Берже М. Геометрия, М. Мир. 1984.
2. Панов А.А., Панов Д.А. Гомеоидная плотность и теорема Понселе, Матем. просв., Ser. 3, No.5, 2001, 145–157.
3. King J.L. Three Problems in Search of a Measure, The American Mathematical Monthly, Vol.101, No.7, 1994, 609-628.

4. Lebesgue H. Les Coniques. Paris: Gauthier-Villars, 1942.
5. Poncelet J.-V. Traité des propriétés projectives des figures. Gauthier-Villars, Paris, 1822.
6. Shoenberg I.J. On Jacobi-Bertrand's proof of a Theorem of Poncelet, Studies in Pure Mathematics, Birkhauser, 1983, 623-627.