Секция «Математика и механика»

Задача о распространении волн в среде с памятью

Царицанский Анатолий Николаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: tolyan777x@gmail.com

Формула распространяющихся волн $u = f(x-t) + g(x+t)$ является одной из фундаментальных форм представления общего решения одномерного волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$. В случае, когда это уравнение рассматривается не в прямоугольной области (например, для задач с подвижной границей или для задач в ограниченной области произвольной формы), она оказывается единственным инструментом анализа свойств решений. Аналог этой формулы для волнового уравнения в неоднородной среде $a(x)u_{tt} = (b(x)u_x)_x$ был представлен в [1]. В работе [2] было рассмотрено волновое уравнение в среде с памятью

$$\rho_s(z)u_{tt} = (\mu(z)u_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)u_t + \chi^2(z)\rho_l^3(z)u - \chi^3(z)\rho_l^4(z)\int_0^t \exp\left\{-\chi(z)\rho_l(z)(t-\tau)\right\} u(\tau,z)d\tau, \tag{1}$$

для которого также была получена формула распространяющихся волн (вопрос о применимости метода распространяющихся волн для уравнения (1) был задан Х.Х.Имомназаровым в 2006 г.). Настоящая работа продолжает исследования свойств распространения волн в среде с памятью. В качестве объекта исследования выступает уравнение с постоянными коэффициентами следующего вида

$$\beta u_{tt} = hu_{xx} + \alpha u_{txx} + c\int_0^t \exp\left\{-\lambda(t-\tau)\right\} u_{xx}(\tau,x)d\tau, \quad \alpha \neq 0 \tag{2}$$

(вопрос о применимости метода распространяющихся волн для уравнения (2) был задан А.С. Шамаевым в 2012 г.) Введением дополнительной неизвестной функции

$$v(t,x) = \int_0^t \exp\left\{-\lambda(t-\tau)\right\} u_{xx}(\tau,x)d\tau \tag{3}$$

уравнение (2) сводится к чисто дифференциальной системе, которая заменой пространственной переменной и линеаризацией приводится к виду

$$\begin{cases} u_s = p, \\ u_t + \gamma v_t = \eta v + q, \\ q_t = \delta v, \\ p_s = \eta v_t + \rho v \end{cases} \tag{4}$$

с двумя характеристиками $s = const$ и двумя $t = const$.
Основной результат работы представлен следующей теоремой.

Теорема. *Общее решение системы* (4) *имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = \gamma f^4(t,s), \\ v(t,s) = f^1(t,s) - f^4(t,s), \\ p(t,s) = \eta f^3(t,s), \\ q(t,s) = f^2(t,s), \end{cases} \tag{5}$$

где $f^\alpha(t,s)$ $(\alpha \in \{1,2,3,4\})$ *являются общим решением системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка*

$$\begin{cases} {f^1}_t(t,s) = \dfrac{\eta}{\gamma} f^1(t,s) - \dfrac{1}{\gamma} f^2(t,s) - \dfrac{\eta}{\gamma} f^4(t,s), \\ {f^2}_t(t,s) = \delta f^1(t,s) - \delta f^4(t,s), \\ {f^3}_s(t,s) + {f^4}_t(t,s) = \dfrac{\rho\gamma + \eta^2}{\eta\gamma} f^1(t,s) + \dfrac{1}{\gamma} f^2(t,s) - \dfrac{\rho\gamma + \eta^2}{\eta\gamma} f^4(t,s), \\ {f^4}_s(t,s) = \dfrac{\eta}{\gamma} f^3(t,s). \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) описывает перенос и перераспределение между собой четырех волн $f^\alpha(t,s)$. Коэффициенты η, γ, ρ и δ зависят только от свойств среды и выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Литература

1. Боровских А.В. Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 2004. вып. 24. С. 3-43.

2. Боровских А.В., Царицанский А.Н. Формула распространяющихся волн для среды с памятью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 901-902.