Секция «Математика и механика»

Однопараметрические полугруппы голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром

Кудрявцева Ольга Сергеевна
Аспирант
Волгоградский государственный университет, институт математики и информационных технологий , Волжский, Россия
E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

Пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность всех голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ функций f, принимающих значения из $\mathbb{D}$, оставляющих инвариантным вещественный диаметр, монотонно возрастающих на вещественном диаметре и имеющих на нём ограниченное искажение. Более точно, $\mathfrak{D}$ – совокупность голоморфных отображений $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям:

(1) $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-1,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = \pm 1$;

(2) $f'(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$ и $\sup\limits_{x\in(-1,1)} f'(x) < \infty$.

Заметим, что $\mathfrak{D}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Важную роль в исследовании структуры полугруппы голоморфных отображений играют однопараметрические полугруппы [1].

Определение 1. *Под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{D}$ понимается непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{D}$.*

Определение 2. *Функция $f \in \mathfrak{D}$ вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, если существует такая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{D}$, что $f^1 = f$.*

В работе установлены критерии вложимости в классе $\mathfrak{D}$ в терминах решений функциональных уравнений. Выделяется несколько случаев в зависимости от наличия или отсутствия внутренней неподвижной точки функции $f \in \mathfrak{D}$. Отметим, что если $f \in \mathfrak{D}$ имеет внутреннюю неподвижную точку, то эта точка может лежать только на вещественном диаметре. Если же $f \in \mathfrak{D}$ и $f(x) \neq x$ для всех $x \in (-1,1)$, то выражение $f(x) - x$ сохраняет знак.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathfrak{D}$ и $f(q) = q$ при некотором $q \in (-1,1)$. Тогда, если f вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{D}$, то существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция F, являющаяся решением функционального уравнения*

$$F(f(z)) = f'(q)F(z)$$

и допускающая представление в виде

$$\begin{aligned} F(z) = (z-q)\,\frac{1-qz}{1-q^2}\left(\frac{1+q}{1+z}\right)^{2\gamma_1}\left(\frac{1-q}{1-z}\right)^{2\gamma_2} \times \\ \times\ \exp\left\{\gamma_3 \int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1-2xq+q^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\right\} \end{aligned} \qquad (1)$$

с некоторыми $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 \geqslant 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ *и вероятностной мерой* μ *на* $[-1, 1]$. *При этом, под степенными функциями и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения* 1 *и* 0, *соответственно, при* $z = q$.

Обратно, всякая функция F *вида (1) однолистна в* $\mathbb{D}$ *и отображает* $\mathbb{D}$ *на звёздную относительно начала координат область. При этом, функции* $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$, *принадлежат* $\mathfrak{D}$, $f(q) = q$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathfrak{D}$ *и* $f(x) > x$ *для всех* $x \in (-1, 1)$. *Тогда, если* f *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, *то существует голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция* F, *являющаяся решением функционального уравнения*

$$F(f(z)) = F(z) + 1$$

и допускающая представление в виде

$$F(z) = \lambda_1 \ln \frac{1+z}{1-z} + \lambda_2 \frac{z}{(1-z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{[-1,1)} \ln \frac{1 - 2xz + z^2}{(1-z)^2} \, \frac{d\mu(x)}{1-x} \qquad (2)$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ *и вероятностной мерой* μ *на* $[-1, 1)$. *При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение* 0 *при* $z = 0$.

Обратно, всякая функция F *вида (2) однолистна в* $\mathbb{D}$ *и отображает* $\mathbb{D}$ *на область, которая с каждой точкой* $w \in F(\mathbb{D})$ *содержит и весь луч* $\{w + t \colon t \geqslant 0\}$. *При этом, функции* $f(z) = F^{-1}(F(z) + 1)$ *принадлежат* $\mathfrak{D}$, $f(x) > x$ *для всех* $x \in (-1, 1)$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathfrak{D}$ *и* $f(x) < x$ *для всех* $x \in (-1, 1)$. *Тогда, если* f *вложима в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$, *то существует голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция* F, *являющаяся решением функционального уравнения*

$$F(f(z)) = F(z) + 1$$

и допускающая представление в виде

$$F(z) = \lambda_1 \ln \frac{1-z}{1+z} - \lambda_2 \frac{z}{(1+z)^2} + \lambda_3 \int\limits_{(-1,1]} \ln \frac{1 - 2xz + z^2}{(1+z)^2} \, \frac{d\mu(x)}{1+x} \qquad (3)$$

с некоторыми $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ *и вероятностной мерой* μ *на* $(-1, 1]$. *При этом, под логарифмами понимаются ветви, принимающие значение* 0 *при* $z = 0$.

Обратно, всякая функция F *вида (3) однолистна в* $\mathbb{D}$ *и отображает* $\mathbb{D}$ *на область, которая с каждой точкой* $w \in F(\mathbb{D})$ *содержит и весь луч* $\{w + t \colon t \geqslant 0\}$. *При этом, функции* $f(z) = F^{-1}(F(z) + 1)$ *принадлежат* $\mathfrak{D}$, $f(x) < x$ *для всех* $x \in (-1, 1)$ *и вложимы в однопараметрическую полугруппу в* $\mathfrak{D}$.

Литература

1. Горяйнов В.В., Кудрявцева О.С. Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 7. С. 43-74.

Слова благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00434-а)