Секция «Математика и механика»

Представление решения параболического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве в виде формулы Фейнмана

Ремизов Иван Дмитриевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ivremizov@yandex.ru

С тех пор, как в пионерских работах Р.Ф. Фейнмана [1-2] впервые появилось представление решений эволюционных уравнений в виде предела кратных интегралов при стремящейся к бесконечности кратности, интерес к названным в честь их первооткрывателя формулам Фейнмана не угасает до настоящего времени [3].
В настоящем сообщении развиты и усилены недавние результаты [4], а именно, получено представление в виде формулы Фейнмана решения задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Lu(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

где $u\colon [0,+\infty)\times H \to \mathbb{R}$, H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство конечной или бесконечной размерности, а оператор L действует в классе $X \ni u_0$ функций, являющийхся равномерными пределами ограниченных вещественных цилиндрических гладких функций на H с ограниченными производными всех порядков и задаётся формулой

$$(L\varphi)(x) = g(x)\mathrm{tr}A\varphi''(x) + \langle \varphi'(x), AB(x)\rangle + C(x)\varphi(x),$$

где $A\colon H \to H$ — ядерный самосопряжённый положительный оператор, $g \in X$, $C \in X$, и при всех $x \in H$ выполняется $g(x) \geq g_0 \equiv \mathrm{const} > 0, C(x) \leq 0$. Кроме того, функция $B\colon H \to H$ является равномерным пределом ограниченных цилиндрических гладких (с ограниченными производными) функций $H \to H$. Определим семейство операторов $(S_t)_{t\geq 0}$, $S_t\colon X \to X$ равенством

$$(S_t\varphi)(x) = e^{tC(x)} \int_H \varphi(x+y) e^{\left\langle \frac{1}{g(x)} B(x), y\right\rangle} \mu_{2tg(x)A}(dy),$$

где $\mu_{2tg(x)A}(dy)$ — гауссова мера на H с корреляционным оператором $2tg(x)A$ и нулевым средним. Автором доклада доказана следующая
Теорема. Если замыкание оператора L является генератором сильно непрерывной полугруппы $e^{t\overline{L}}$, то для каждой функции $u_0 \in X$ имеет место

$$u(t,x) = \left(e^{t\overline{L}} u_0\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(S_{\frac{t}{n}}\right)^n u_0\right)(x) \tag{2}$$

равномерно по $t \in [0, t_0]$ для каждого $t_0 > 0$, и поэтому задача Коши (1) имеет единственное умеренное решение (mild solution) в классе X.
Поскольку оператор $S_{\frac{t}{n}}$ интегральный, в правой части (2) стоит предел кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности, т.е. формула Фейнмана.

Литература

1. R.P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistiv quantum mechanics. — Rev. Mod. Phys., 20 (1948), 367-387.

2. R.P. Feynman. An operation calculus having applications in quantum electrodinamics. — Phys. Rev. 84 (1951).

3. O.G. Smolyanov. Feynman formulae for evolutionary equations. — Trends in Stochastic Analyasis, London Mathematical Society Lecture Notes Series 353, 2009.

4. I.D. Remizov. Solution of a Cauchy problem for a diffusion equation in a Hilbert space by a Feynman formula. — Russian Journal of Mathematical Physics, July 2012, Volume 19, Issue 3, pp 360-372.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность О.Г. Смолянову за постановку задачи и внимание к работе.