## Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

### Методы решения больших плотных систем линейных уравнений, возникающих при дискретизации интегральных уравнений.

***Сушникова Дарья Алексеевна***
*Студент*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*
*E-mail: darya-sushnikova@yandex.ru*

В данной работе рассмотривается внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа. Стандартным способом решения этой задачи является ввод двумерной или трёхмерной сетки, дискретизация границ, введение фиктивной области, постановка граничных условий. Таким образом мы получим задачи сложности $O(N^2)$ и $O(N^3)$ для двумерной и трёхмерной области соответственно. Для реальных задач такая сложность неприемлема. Рассмотрим другой метод решения этой задачи. Задача Дирехле для уравнения Лапласа сводится к интегральному уравнению:

$$\int_{\delta\Omega} q(y) \frac{1}{\|x-y\|} dy = f(y).$$

Введём некоторую дискретизацию границы и получаем систему с матрицей $A$ размера $M \times M$ [1]. Существуют различные подходы для приближения матрично-векторного произведения с плотными матрицами, возникающими при решении интегральных уравнений. Однако на данный момент практически отсутствуют эффективные методы решения линейных систем с такими матрицами. Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа. Итак, в нашем распоряжении есть матрица $A$. Это плотная матрица, у которой мы можем вычислить любой элемент. Все идеи решения системы с такой матрицей основаны н приближении её матрицей малого ранга. [2] Однако, сама матрица не является матрицей малого ранга, так как ядро рассматриемого интегрального уравнения имеет сингулярность. Также эта матрица может быть плохо обусловлена. Для решения системы с плотной матрицей нам необходимо научиться приближать её матрицей малого ранга и умножать приближённую матрицу на вектор, для того, чтобы применить к ней один из итерационных методов [3]. В недавних работах был предложен так называемый <u>мультизарядовый метод</u> аппроксимации плотной матрицы. В данной работе предполагается, что разложение (аппроксимация) уже построена, и ставится вопрос, как можно использовать такое малопараметрическое представление для быстрого решения системы с такой матрицей. Опишем основную идею, которая естественным образом вытекает из базового алгоритма матрично-векторного произведения. Алгоритм матрично-векторного произведения состоит из двух шагов. На первом шаге вычисляются эквивалентные заряды в каждом из узлов дерева с помощью обхода дерева источников снизу вверх и умножения на матрицы перехода; на втором шаге происходит пересчет действия эквивалентных зарядов-источников на эквивалентные заряды-приемники (умножение на матрицы взаимодействия); на третьем шаге происходит обход дерева приемников сверху вниз, происходит умножение насчитанных взаимодействий на матрицы перехода и на нижнем уровне возникает требуемый результат. На каждом из трех шагов происходит умножение матриц небольшого размера (порядка

$r \times r$) на векторы. Отличие лишь в том, что на первом шаге сначала необходимо производить матрично-векторные умножения снизу-вверх по дереву источников, на втором шаге все эти операции абсолютно независимы, а на третьем шаге необходимо умножать матрицы на векторы сверху-вниз по дереву приемников. Например рассмотрим источники $q_1, q_2$ и приёмники $w_1, w_2$. Матрица $B$ обозначает связь между уровнями источников, $C$ — это матрица перехода между корнями деревьев, $c_1$ и $c_2$ означают связь между уровнями дерева приёмников.

$$\begin{cases} Q = B \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ W = CQ \\ w_1 = c_1 w + A_1 q_1 \\ w_2 = c_2 w + A_2 q_2 \end{cases}$$

Основная идея работы состоит в том, что эти соотношения можно переписать в виде умножения разреженной матрицы на вектор, если рассмотреть временные переменные $Q$, $W$ как дополнительные неизвестные. Основным результатом работы является создание алгоритмов формирования такой расширенной матрицы, изучение ее структуры, и применимости стандартных методов работы с разреженными матрицами для приближенного обращения и построения предобуславливателей.

## Литература

1. Сетуха А.В., Численные методы решения некоторых краевых задач с обобщенными граничными условиями и их приложения к аэродинамике // Диссертация доктора физ.-мат. Наук по специальности 01.01.07, 2003г.

2. Tyrtyshnikov E.E., Mosaic-skeleton approximations // Calcolo – V 33 – N 1 – 1996 – 47-57

3. Methods: Theory, Algorithms and Applications — 2010 — p247-256