Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Вычисление тензорного ранга за конечное число операций

Матвеев Сергей Александрович

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

E-mail: matveevserega@rambler.ru

Задачи разделения переменных в многомерных массивах особенно актуальны в современной вычислительной математике. Широкое распространение имеет идея представления тензора в виде канонического разложения:

$$A[i_1, i_2, i_3, ..., i_d] = \sum_{k=0}^{r} u_1[i_1, k] u_2[i_2, k] ... u_d[i_d, k] \tag{1}$$

Минимальное возможное число слагаемых в (1) принято называть каноническим тензорным рангом. Канонический тензорный ранг – характеристика, неусточивая к возмущениям элементов тензора, поэтому задача его вычисления является сложной алгебраической задачей. Например, в любой ε окрестности тензора T

$$T = b_1 \otimes a_2 \otimes a_3 + a_1 \otimes b_2 \otimes a_3 + a_1 \otimes a_2 \otimes b_3 \tag{2}$$

присутствует тензор ранга не выше 2, однако можно доказать [1], что канонический ранг T в точности равен 3. Из представленного примера (2) следует, что возможные вычисления по поиску канонического ранга необходимо проводить символьно.

Некоторые тензоры, часто используемые в приложениях, могут быть представлены в виде канонического разложения. В частности, ядро разложения Таккера для четырёхмерного оператора Лапласа имеет вид:

$$L = a \otimes a \otimes a \otimes b + a \otimes a \otimes a \otimes b \otimes a + a \otimes b \otimes a \otimes a + b \otimes a \otimes a \otimes a \tag{3}$$

Откуда следует, что канонический ранг тензора не превосходит 4, однако не ясно, существует ли каноническое разложение с меньшим числом слагаемых.

Задачу вычисления канонического ранга тензора можно свести к задаче проверки на разрешимость системы полиномиальных уравнений. Полиномиальная система формируется из формул вычисления элементов тензора с помощью канонического разложения (1), где $A[i_1, i_2, i_3, ..., i_d]$ – элементы исходного тензора, $u_1[i_1, k], u_2[i_2, k], ..., u_d[i_d, k]$ – переменные.

С помощью систем компьютерной алгебры для описанных полиномиальных систем можно построить базис Грёбнера, а далее использовать теорему Гильберта о нулях для проверки описанных систем на разрешимость. Если система разрешима, то существует каноническое разложение соответствующей длины, и имеет смысл провести проверку для более короткого разложения. В противном случае канонический тензорный ранг равен минимально возможной длине разложения из полученных ранее.

В теории данный метод позволяет вычислить канонический ранг для любого тензора,

однако на практике алгоритмическая сложность методов построения базисов Грёбнера для полиномиальных систем позволяет проводить вычисления лишь для тензоров малых размеров. Например, сложность алгоритма, описанного в [2] составляет $d^{O(n^2)}$ операций, где d – степени полиномов в системе, а n – число неизвестных.
Для тензора (3) полиномиальная система из 16 уравнений над 24 неизвестными для канонического разложения длины 3 оказалась неразрешимой, а значит, его канонический ранг равен 4.
В случае вычисления канонического ранга для ядра разложения Таккера пятимерного оператора Лапласа система сводится уже к 32 уравнениям над 40 неизвестными, и мощностей обычных компьютеров уже не хватает для её проверки на разрешимость.

Литература

1. T. Kolda, B. Bader Tensor Decompositions and Applications // SIAM review – 2009 – Vol. 51 No 3 – Pp. 455-500

2. J.C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, T. Mora Efficient Computation of Zero-dimensional Gröbner Bases by Change of Ordering// Journal of Symbolic Computation – 1993 – 16 (4): 329–344