Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Уравнение переноса с разрывными коэффициентами и метод характеристик

Вещинская Виктория Валерьевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: luce.etterna@gmail.com

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения переноса следующего вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + g(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = -\mu(x)u(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in [0,\infty)), \tag{2}$$

$$u(t,0) = p(t) + \int_0^\infty \beta(x)u(t,x)dx \quad (t \in [0,T]). \tag{3}$$

Здесь $T > 0$, $g(\cdot)$ – заданная положительнозначная ограниченная измеримая по Борелю функция на R^1, $\mu(\cdot)$ – заданная положительнозначная ограниченная измеримая по Борелю функция на R^1, $u_0(\cdot)$ – заданная ограниченная измеримая по Борелю финитная функция на $[0,\infty)$, $p(\cdot)$ – заданная ограниченная измеримая по Борелю функция, $\beta(\cdot)$ – заданная ограниченная измеримая по Борелю функция на $[0,\infty)$. Кроме того, предполагаем, что функция $1/g(\cdot)$ суммируема на любом конечном интервале.
Начально-краевая задача (1) – (3) возникает при моделировании динамики структурированных по возрасту популяций [5, 6].
Приведенные выше условия не позволяют, вообще говоря, определить решение начально-краевой задачи (1) – (3) в классическом смысле. На основе определения неклассического решения начально-краевой задачи (1) – (3) при подобных условиях, предложенного в [3, 4], в данной работе вводится определение обобщенного решения задачи (1) – (3) для случая борелевских $g(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$.
Решением начально-краевой задачи (1) – (3) по методу характеристик будем называть пару $(u(\cdot,\cdot), a(\cdot))$, где $u(\cdot,\cdot) : [0,T] \times [0,\infty) \mapsto R^1$ и $a(\cdot) : [0,T] \mapsto R^1$ борелевские ограниченные функции, удовлетворяющие следующим условиям

$$u(t,x) = \begin{cases} a(\tau(t,x)) \exp\left(-\int_{\tau(t,x)}^t \mu(\lambda(s;t,x))ds\right), & x \in [0,\lambda_0(t)) \\ u_0(\lambda(0;t,x)) \exp\left(-\int_0^t \mu(\lambda(s;t,x))ds\right), & x \in [\lambda_0(t),\infty) \\ & ((t,l) \in [0,T] \times [0,\infty)) \end{cases} \tag{4}$$

$$a(t) = p(t) + \int_0^\infty \beta(x)u(t,x)dx \quad (t \in [0,T]), \tag{5}$$

где через $\lambda(\cdot;t_0,x_0)$ обозначена характеристика уравнения (1), проходящая через точку $(t_0,x_0) \in [0,T] \times [0,\infty)$, то есть решение дифференциального уравнения $\dot\lambda(t) = g(\lambda(t))$, с начальным условием $\lambda(t_0) = x_0$, $\lambda_0(\cdot) = \lambda(\cdot;0,0)$, а $\tau(t,x) \in [0,T]$, где $t \in [0,T]$, $x \in [0,\lambda_0(t)]$, таково, что $\lambda(\tau(t,x);t,x) = 0$.

Теорема 1. 1) Пусть пара $(u(\cdot,\cdot),a(\cdot))$ является решением начально-краевой задачи (1) – (3) по методу характеристик, тогда $a(\cdot)$ – решение следующего интегрального уравнения

$$a(t)=\xi(t)+\int_0^t \beta(\lambda(t;\sigma,0))g(\lambda(t;\sigma,0))a(\sigma)\exp\left(-\int_\sigma^t \mu(\lambda(s;\sigma,0))ds\right)d\sigma \ (t\in[0,T]), \quad (6)$$

где

$$\xi(t)=p(t)+\int_{\lambda_0(t)}^{\infty}\beta(x)u_0(\lambda(0;t,x))\exp\left(-\int_0^t \mu(\lambda(s;t,x))ds\right)dx \quad (t\in[0,T]),$$

а $u(\cdot,\cdot)$ представляется по формуле (4).
2) Пусть $a(\cdot)$ есть интегрируемая по Лебегу функция, являющаяся решением интегрального уравнения (6), а $u(\cdot,\cdot)$ задана по (4), тогда пара $(u(\cdot,\cdot),a(\cdot))$ является решением начально-краевой задачи (1) – (3) по методу характеристик.
В работе также введено обобщенное решение задачи Коши по методу характеристик, установлена связь обобщенного решения задачи Коши и решения начально-краевой задачи (1) – (3) по методу характеристик, а также связь обобщенного решения задачи Коши по методу характеристик и решения задачи Коши по Кружкову [2].

Литература

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

2. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Математический сборник. Т. 81(123). № 2. 1970. С. 228-255.

3. Kato N., Torikata H. Local existence for a general model of size-dependent population dynamics // Abstract and Applied Analysis. V. 2. 1997. P. 207-226.

4. Kato N. Positive global solutions for a general model of size-dependent population dynamics // Abstract and Applied Analysis. V. 5. 2004. P. 191-206.

5. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A. Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management. // Applied Mathematics Letters. V. 21. 2008. P. 1090-1094.

6. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A. A bang-bang regime in optimal harvesting of size-structured populations. // Nonlinear analysis. V. 71. 2009. P. 2331-2336.