Секция «Математика и механика»

Обобщение задачи Бертрана на поверхностях вращения

Федосеев Денис Александрович
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: docxaos@mail.ru

Во второй половине девятнадцатого века Ж.Бертран поставил и решил следующую задачу ([1], [2]):

Задача 1 *Пусть точка движется на плоскости в центральном поле, причем при почти всех начальных условиях траектории ее движения замкнуты. Тогда каким может быть центральный аналитический закон притяжения?*

Теорема Бертрана утверждает, что таких законов только два: закон Ньютона и закон Гука.

В настоящей работе рассматривается обобщение этой классической задачи.

А именно, пусть дана двумерная поверхность вращения $S = \mathbb{S}^1 \times (a, b)$, с метрикой $G = diag\{1, f^2(r)\}$. Пусть далее известно, что все ограниченные траектории движения точки в центральном поле сил $\Psi(r)$ замкнуты (глобальная теорема) или, что все ограниченные траектории точки с начальными условиями, $\epsilon-$близкими к данной круговой траектории, замкнуты. Тогда на каких поверхностях S (определяемых функцией f) существуют такие законы сил и какой вид они имеют? Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1 *(Глобальная теорема для поверхностей первого типа)*

Пусть дана двумерная поверхность S, диффеоморфная $(a, b) \times S^1$, оснащенная римановой метрикой, описанная в параграфе 1.2.

Пусть функция f удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, $\xi \neq 0$, где ξ рационально, т.е. f имеет один из следующих видов:

$$f(r) = \begin{cases} \pm\xi(r-\alpha), & k = 0, \\ \dfrac{\xi}{\sqrt{k}} sin(\sqrt{k}(r-\alpha)), & k > 0, \\ \pm\dfrac{\xi}{\sqrt{-k}} sh(\sqrt{-k}(r-\alpha)), & k < 0, \end{cases},$$

где k – половина скалярной кривизны Римана этой поверхности; в данном случае кривизна постоянна. Пусть, далее, интервал (a, b) – "максимальный"для соответствующей функции, иными словами $\alpha \in \{a, b\}$.

Тогда в классе аналитических центральных потенциалов на S, таких что через каждую точку поверхности проходит хотя бы одна круговая орбита $\{r\} \times \mathbb{S}^1$, существуют два и только два (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) периодических потенциала на S.

При этом потенциалы будут иметь вид: $V_1 = A\theta(r) + B$, $V_2 = \frac{A}{\theta^2(r)} + B$, где A, B – некоторые константы, $\theta(r) = -\frac{f'(r)}{\xi^2 f(r)}$.

Теорема 2 *(Глобальная теорема для поверхностей второго типа)*

Пусть функция f не удовлетворяет тождеству $f''f-(f')^2=-\xi^2$ ни для какого рационального ξ, $\xi\neq 0$. Тогда существует не более одного периодического потенциала на S (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант). При этом потенциал ровно один (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: существует функция $\theta=\theta(r)$, такая что $\theta'(r)=\frac{1}{f^2(r)}$ и выполнено тождество $\frac{f'}{f}=-\frac{\theta}{4\mu^2}-c\frac{\theta^{-3}}{\mu^2}$, где μ – отличная от нуля рациональная константа, а c – ненулевая константа.

Теорема 3 *(Локальная теорема для поверхностей первого типа)*

Пусть в открытой связной области $U=(a',b')\times S^1$ на поверхности $S=(a,b)\times S^1$ с метрикой $G=diag\{1,f^2(r)\}$ выполнено тождество $f''f-(f')^2=-\xi^2$, где $\xi\neq 0$, ξ рационально, $a\leq a'$

Теорема 4 *(Локальная теорема для поверхностей второго типа)*

Пусть в открытой связной области $U=(a',b')\times S^1$ на поверхности $S=(a,b)\times S^1$ с метрикой $G=diag\{1,f^2(r)\}$ не выполнено тождество $f''f-(f')^2=-\xi^2$ ни для каких рациональных$\xi\neq 0$, $a\leq a'$

Кроме того, в явном виде найдены поверхности, допускающие "обобщение теоремы Бертрана": они представляют собой накрытия над плоскостью, сферой и плоскостью Лобачевского. При этом список возможных законов притяжения вновь (как и в классическом случае) исчерпывается законом Ньютона и законом Гука.

Работа выполнена совместно с О.А.Загрядским и Е.А.Кудрявцевой.

Литература

1. Дарбу Г. Об одной задаче механики. Классическая динамика в неевклидовых пространствах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, стр. 83-88.

2. Bertran J., C. R. Acad. Sci. Paris, 1873, V.77.

Слова благодарности

Авторы благодарны А.Т.Фоменко, М.Д.Малых и А.В.Щепетилову за полезные обсуждения рассматриваемой задачи.

Данная работа была частично поддержана следующими грантами: Программа Президента РФ поддержки ведущих научных школ России, проект НШ-660.2008.1, Программа развития научного потенциала высшей школы, проект РНП 2.1.1.3704, грант РФФИ, проект 07-01-00648-а.