Секция «Математика и механика»

О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка

Тихонова Ирина Михайловна

Аспирант

Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Институт математики и информатики, Якутск, Россия

E-mail: IrinaMikh3007@mail.ru

Пусть $\Omega \subseteq R^n$ - ограниченная область с гладкой границей S, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $T > 0$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения смешанного типа в постановке А.Н. Терехова [1-3].

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u\mid_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u_t \mid_{\overline{P}_0^+} = 0,\ u \mid_{\overline{P}_T^-} = 0,\ u\mid_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, $k(x,T) < 0$ при $x \in \overline{\Omega}$,

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^{\propto}[0,T]$ такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 \parallel u \parallel_1^2, \quad C_1 = const > 0. \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть коэффициент $k(x,t) = k(t),\ k(0) < 0,\ k(T) < 0$ и

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные функции $\xi(t), \eta(t) \in C^{\propto}[0,T]$ такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$-(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_2 \int_Q \left[u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2\right] dQ - C_3 \parallel u \parallel_1^2, \quad C_2,\ C_3 > 0, \tag{5}$$

где $\widetilde{\Delta}u = u_{tt} + \Delta u$.

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta}v \equiv v_{tt} + \Delta v = -\lambda v,\ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0,\ v|_{t=0} = 0,\ v|_{t=T} = 0.$$

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt} + \eta(t)\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots ,$$

где функции $\xi(t),\ \eta(t)$ - из леммы 2. Отметим, что априорная оценка (4) остается справедливой при новых функциях $\xi(t),\ \eta(t)$.

Теорема 1. Функции $\{\psi_k(x,t)\}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.

Приближенное решение краевой задачи (1)–(3) ищется в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_k^N \varphi_k.$$

Коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k),\ k = \overline{1, N}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$ существует единственное регулярное решение краевой задачи (1)–(3) из пространства $W_2^2(Q)$.

Литература

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.

2. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

3. Терехов А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. - Новосибирск, 1979. С.128-136.

Слова благодарности

Автор благодарит научного руководителя Егорова И.Е. за постановку задачи и руководство работой. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта№02.740.11.0609.)