Секция «Математика и механика»

Классификация $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-орбит тернарных форм

Бибиков Павел Витальевич

Аспирант

Институт проблем управления им. Трапезникова РАН, лаборатория 6, Москва, Россия

E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Пусть T_n — пространство тернарных форм степени $n \geqslant 2$ от переменных x, y, z над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ на пространстве T_n, такое, что подгруппа $\mathrm{SL}_3 \subset \mathrm{GL}_3$ действует стандартными заменами координат, а центр $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_3$ действует гомотетиями $f \mapsto \lambda f$, где $f \in T_n$ и $\lambda \in \mathbb{C}^*$. В работе решается задача описания орбит этого действия (см. [5]). Заметим, что к настоящему времени эта задача решена лишь в случае $n = 2$ (это результат из курса линейной алгебры) и $n = 3$ (это классический результат Вейерштрасса). Отметим также, что эта задача эквивалентна классической задаче проективной геометрии: классифицировать алгебраические проективные кривые на проективной плоскости с точностью до проективных преобразований.

Основной идеей является представление пространства T_n как пространства решений дифференциального уравнения Эйлера $xf_x + yf_y + zf_z = nf$, что дает возможность применить к нашей алгебраической задаче дифференциально-геометрические методы (решение аналогичной задачи для бинарных форм см. в [3, 6]).

Рассмотрим пространство k-джетов функций $J^k\mathbb{C}^3$ с каноническими координатами $(x, y, z, u, u_{100}, u_{010}, u_{001} \ldots)$ (все необходимые определения см. в [1]). Уравнению Эйлера соответствует гиперповерхность $\mathcal{E} = \{xu_{100} + yu_{010} + zu_{001} = nu\} \subset J^1\mathbb{C}^3$.

Теорема 1 ([4]).*Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы* GL_3 *на многообразии* $\mathcal{E}^{(\infty)}$ *порождается инвариантом* H *порядка 2, инвариантами* I, J, K *и* L *порядка 3 и инвариантными дифференцированиями* ∇ *и* δ. *Эта алгебра разделяет неособые* GL_3*-орбиты джетов.*

Рассмотрим теперь следующие дифференциальные инварианты четвертого порядка: H, I, J, K, L, ∇I, ∇J, ∇K, ∇L, δL. Заметим (см. теорему 1), что они разделяют неособые GL_3-орбиты 4-джетов. Их ограничения на график L_f^4 тернарной формы f являются однородными рациональными функциями от переменных x, y, z и определяют рациональное отображение $\pi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^{10}$. Значит, между этими ограничениями существуют алгебраические зависимости. Обозначим множество этих зависимостей через $\mathcal{D}_f$ и образ отображения π через Σ_f.

Теорема 2 ([4]).*1. Тернарные формы* f *и* $\widetilde{f}$ *с ненулевым гессианом* GL_3*-эквивалентны если и только если* $\Sigma_f = \Sigma_{\widetilde{f}}$.

2. Тернарные формы f *и* $\widetilde{f}$ *с ненулевым гессианом* GL_3*-эквивалентны если и только если* $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\widetilde{f}}$.

Аналогичная теорема для классификации GL_3-орбит тернарных форм с нулевым гессианом доказана в [2].

Таким образом, в данной работе полностью решена классическая проблема описания GL_3-орбит тернарных форм, поставленная более 170 лет назад в работах Буля, Кэли, Эйзенштейна и Вейерштрасса.

Литература

1. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Москва, ВИНИТИ, т.28, 1988.
2. Бибиков П.В. Классификация тернарных форм с нулевым гессианом // Известия ВУЗов, в печати.
3. Бибиков П.В., Лычагин В.В. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм // ДАН. 2010. Т.435. Вып.4. С.439–440.
4. Бибиков П.В., Лычагин В.В. $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-орбиты тернарных рациональных форм // ДАН, в печати.
5. Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов. Москва, ВИНИТИ, т.55, 1989.
6. Bibikov P.V., Lychagin V.V. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-orbits of binary rational forms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2011. V.32. No.1. P.94–101.

Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя В.В. Лычагина за постановку задачи и внимание к работе.