Секция «Математика и механика»

Двойные многообразия флагов и разложение тензорных произведений

Пономарева Елизавета Валентиновна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: lizaveta@narod.ru

Пусть G — полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, T — максимальный тор, $B \supseteq T$ — борелевская подгруппа, $P, Q \supseteq B$ — параболические подгруппы, $P = L \leftthreetimes P_u$, $Q = M \leftthreetimes Q_u$ — разложения Леви, причем L и M содержат T, $\mathfrak{p}_\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{q}_\mathfrak{u}$ — касательные алгебры к P_u и Q_u соответственно, Π — система простых корней, α_i — простые корни, их нумерация соответствует [1].

Определение. Сложностью действия группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X называется коразмерность типичной орбиты $Bx \subseteq X$.

Мы классифицируем двойные многообразия флагов $X = G/P \times G/Q$ сложности 0 и 1. Эта задача имеет приложения к задаче о разложении тензорного произведения двух неприводимых G-модулей на неприводимые подмодули. Если два неприводимых G-модуля реализованы как пространства сечений линейных расслоений над G/P и G/Q соответственно, то их тензорное произведение реализуется как пространство сечений тензорного произведения этих расслоений над $G/P \times G/Q$. В случае, когда сложность многообразия X не превосходит единицы, существует эффективный способ разложить пространство сечений линейного расслоения над X на неприводимые G-модули.

Ранее Литтельман нашел все пары максимальных параболических подгрупп, для которых сложность соответствующего многообразия флагов равна нулю [2], Стембридж классифицировал все двойные многообразия флагов сложности нуль [4], Панюшев вычислил сложности всех двойных многообразий флагов, отвечающих парам максимальных параболических подгрупп [3].

Наш метод классификации основан на следующей теореме Панюшева.

Теорема 1 ([3]). Сложность действия группы G на $G/P \times G/Q$ равна сложности действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_\mathfrak{u} \cap \mathfrak{q}_\mathfrak{u}$.

Он позволяет единообразно и более простым способом получить результаты Литтельмана и Стембриджа в случае сложности 0 и завершить классификацию в случае сложности 1.

В случае классических групп в качестве B будем рассматриватьподгруппу верхнетреугольных матриц, тогда параболические подгруппы P и Q можно задавать размерами блоков L и M, если L и M имеют блочно-диагональный вид, либо размерами блоков, полученных сопряжением с перестановкой двух средних базисных векторов (такой случай возможен только для SO_n при четных n, в теореме такая параболическая будет помечаться штрихом). В случае особых групп параболические подгруппы будем задавать подмножеством простых корней $\Pi \setminus I$, где подмножество I — система простых корней стандартной подгруппы Леви.

Теорема 2. Пусть G — классическая группа (SL_n, SO_n, Sp_n). Тогда все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют следующим парам параболических подгрупп (с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали и перестановки)

1) $G = SL_n$, сложность 0:
$((p_1, p_2), (q_1, q_2)), ((p_1, p_2), (1, q_2, q_3)), ((p_1, p_2), (q_1, 1, q_3)), ((2, p_2), (q_1, q_2, q_3)), ((1, p_2), (q_1, \ldots, q_s))$

сложность 1:
$((3, p_2), (q_1, q_2, q_3)), p_2 \geqslant 3, q_1, q_2, q_3 \geqslant 2, ((p_1, p_2), (2, 2, q_3)), q_2, q_3 \geqslant 2, p_1, p_2 \geqslant 3, ((p_1, p_2), (2, q_2, 2)),$
$q_2, q_3 \geqslant 2, p_1, p_2 \geqslant 3, ((2, p_2), (q_1, q_2, q_3, q_4)), ((p_1, p_2), (1, 1, 1, q_4)), p_1, p_2 \geqslant 2, ((p_1, p_2), (1, 1, q_3, 1)),$
$p_1, p_2 \geqslant 2,\ ((1, 1, p_3), (q_1, q_2, q_3)),\ ((1, p_2, 1), (q_1, q_2, q_3))$

2) $G = SO_n$, сложность 0:
$((p, p), (p, p)), ((p, p), (p, p)'), ((p, p), (q_1, q_2, q_1)), q_1 = 1, 2, 3, ((p, p), (q, 2, q)), ((p, p), (1, q, q, 1)),$
$((p, p), (1, q, q, 1)'), ((4, 4), (2, 2, 2, 2)'), ((p, p), (1, 1, q, 1, 1)), ((1, p, 1), (q_1, q_2, q_1)), ((p, 1, p), (p, 1, p)),$
$((1, p, 1), (q_1, q_2, q_2, q_1))$

сложность 1:
$((6, 6), (4, 4)),\ ((4, 4), (2, 2, 2, 2)),\ ((5, 5), (2, 3, 3, 2)),\ ((5, 5), (2, 3, 3, 2)'),\ ((5, 5), (3, 2, 2, 3)),$
$((5, 5), (3, 2, 2, 3)'),\ ((4, 4), (1, 2, 2, 2, 1)),\ ((4, 4), (2, 1, 2, 1, 2)),\ ((4, 4), (1, 1, 2, 2, 1, 1)),$
$((4, 4), (1, 1, 2, 2, 1, 1)'),\ ((2, 2, 2), (2, 2, 2)),\ ((2, p, 2), (q, 1, q)),\ p \geqslant 2,\ ((2, 2, 2), (1, 2, 2, 1)),$
$((1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)),\ ((2, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 1)),\ ((1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_3, q_2, q_1)),$
$((1, 2, 2, 1), (1, 2, 2, 1)),\ ((1, 2, 2, 1), (1, 2, 2, 1)')$

3) $G = Sp_n$, сложность 0:
$((p, p), (p, p)),\ ((p, p), (1, q, 1)),\ ((1, p, 1), (q_1, q_2, q_1))$

сложность 1:
$((p, p), (2, q, 2)),\ ((2, 2), (1, 1, 1, 1)),\ ((1, p, 1), (q_1, q_2, q_2, q_1)),\ ((1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_2, q_1))$

Теорема 3. 1) Для групп G_2, F_4 и E_8 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 нет.

2) Для группы E_6 многообразия сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:
$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_2\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_4\}, \{\alpha_5\}),$
$(\{\alpha_5\}, \{\alpha_5\}),\ (\{\alpha_5\}, \{\alpha_6\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_5\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5, \alpha_5\})$

многообразия сложности 1 отвечают следующим парам параболических подгрупп:
$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5, \alpha_6\}),\ (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}),$
$(\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}),\ (\{\alpha_5\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}),\ (\{\alpha_5\}, \{\alpha_5, \alpha_6\})$

3) Для группы E_7 многообразия сложности 0 отвечают
следующим парам параболических подгрупп:
$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}),\ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_7\})$

многообразия сложности 1 отвечают следующим парам параболических подгрупп:
$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\})$

Литература

1. 1 Винберг Э.Б. Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. // УРСС, Москва, 1988.

2. 2 Littelmann P. On spherical double cones. // J.Algebra **66** (1994), no. 1, 142-157.

3. 3 Panyushev D.I. Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions. // Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 3, 455-468.

4. 4 Stembridge J. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. // Represent. Theory 7 (2003), 404-439 (electronic).