Секция «Математика и механика»

Об одной нестационарной системе вейвлетов

Макаричев Виктор Александрович
Аспирант
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», факультет ракетно-космической техники, Харьков, Украина
E-mail: victor.makarichev@gmail.com

Пусть

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot F_n(t)dt \text{ и } \ g_n(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot G_n(t)dt,$$

где $F_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{2t}{4^{n+1}}}{\frac{2t}{4^{n+1}}}\right)^n \cdot F\left(\frac{t}{4^n}\right), G_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{t}{4^{n+1}}}{\frac{t}{4^{n+1}}}\right)^{n+1} \cdot F\left(\frac{t}{4^{n+1}}\right)$ и $F(t) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2t}{4^k}}{\frac{2t}{4^k}} \cdot \cos \frac{t}{4^k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Следует отметить, что $f_0(x)$ есть функция $mup_2(x)$, которая, согласно [1], является финитным решением функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2 \cdot (y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3))\,.$$

Введем в рассмотрение функции $v_{2n}(x) = f_n\left(x - \frac{n+2}{2\cdot 4^n}\right)$ и $v_{2n+1}(x) = g_n\left(x - \frac{n+2}{4^{n+1}}\right)$ для $n = 0, 1, 2, \dots$. Эти функции обладают следующими свойствами:

1) для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $v_n(x)$ является бесконечно дифференцируемой;

2) $supp\ v_{2n} = \left[0, \frac{n+2}{4^n}\right]$ и $supp\ v_{2n+1} = \left[0, \frac{n+2}{2\cdot 4^n}\right]$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$;

3) для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ значения функции $v_n(x)$ в точках вида $\frac{m}{4^n}$ являются рациональными и могут быть найдены с использованием явных формул;

4) для каждого $m = 0, 1, \dots, n$ существуют числа $\{a_k\}_{k\in Z}$ и $\{b_k\}_{k\in Z}$ такие, что

$$x^m = \sum_{k\in Z} a_k \cdot v_{2n}\left(x - \frac{k}{4^n}\right)$$

и

$$x^m = \sum_{k\in Z} b_k \cdot v_{2n+1}\left(x - \frac{k}{2\cdot 4^n}\right)$$

для любого $x \in R$.

Пусть V_n — пространство функций вида $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in I(\varphi)} c_k \cdot v_n\left(x - \frac{k}{2^n}\right),\ x \in R$, где $I(\varphi)$ — конечное подмножество множества целых чисел. Установлено, что $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$.

Далее мы будем считать, что $\|f\| = \|f\|_{L_2(R)}$ и $(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ — скалярное произведение в пространстве V_n.

Для любого натурального n пусть $W_n = \{\varphi \in V_n :\ \ \varphi \perp V_{n-1}\}$ — ортогональное дополнение к V_{n-1} в пространстве V_n.

Теорема 1. *Для любого натурального n существует функция $w_n(x)$ такая, что:*
1) система $\left\{w_n\left(x - \frac{j}{2^{n-1}}\right)\right\}_{j\in Z}$ образует базис пространства W_n;

2) supp $w_n(x) \subseteq \left[0, \frac{n+2}{2^{n-1}}\right]$;
3) для любого $m = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ *имеет место* $\int\limits_R x^m \cdot w_n(x)dx = 0$.

Пространства W_n называются пространствами вейвлетов, а система функций

$$\Omega = \left\{ w_n \left(x - \frac{j}{2^{n-1}} \right) \right\}_{j \in Z, n \in N}$$

— нестационарной неортогональной системой вейвлетов.

В отличие от классических вейвлетов, система финитных бесконечно дифференцируемых функций Ω не является порожденной одной функцией. Здесь, однако, следует отметить, что бесконечно дифференцируемых вейвлетов с компактным носителем не существует [2].

Литература

1. Рвачев В.А., Старец Г.А. Некоторые атомарные функции и их применение // Докл. АН УССР, Сер. А. 1983. № 11. С. 22-24.

2. Lemarie-Rieusset P.G. Existence de "fonction-pere"pour les ondolettes a support compact // C.R. Acad.Sci. Paris Ser.1. 1992. V.314. №1. P. 17-19.