Секция «Математика и механика»

Закон больших чисел для модели эпидемии

Жуковский Максим Евгеньевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: zhukmax@gmail.com

Опишем две модели эпидемии (см. [1]) (модель с одним прыжком и модель с несколькими прыжками).

Пусть $\{x_1, ..., x_n\}$ — некоторое множество точек. В момент времени 1 в каждой точке находится по одной частице. В точке x_1 располагается активная частица, а во всех остальных — неактивные. В *модели с одним прыжком* время дискретно и в каждый момент времени только одна произвольная активная частица прыгает в точку, выбранную из равномерного распределения. В *модели с несколькими прыжками* время также дискретно, и в каждый момент времени каждая активная частица может прыгнуть в любую точку. Частица совершает прыжок с вероятностью p независимо от всех остальных активных частиц, при этом вероятность попадания распределена равномерно по всем точкам и не зависит от того, как прыгают все остальные частицы.

В обеих моделях если частица прыгает в точку, в которой уже до нее побывала (или все еще там находится) активная частица, то совершившая прыжок частица моментально погибает. Если несколько частиц в один момент времени прыгают в одну и ту же точку с неактивной частицей, то все они остаются живы.

Пусть случайная величина $D_n(i)$ равна количеству живых неактивных частиц в момент i, σ_n — момент, в который процесс останавливается. Изучается предельное распределение случайной величины $X_n := n - D_n(\sigma_n)$ при $n \to \infty$.

В 1969 году Ф. Мачадо, Х. Машуриан, Х. Матзингер (см. [2]) доказали центральную предельную теорему для модели с одним прыжком. Пусть q — единственное ненулевое решение уравнения $2p = -\ln(1-p)$, $p \in [0, 1)$, $\mu_r = 2 - \frac{1}{1-q}$, $\sigma = \sqrt{\frac{q-2q^2}{q-1}\frac{1}{\mu_r}}$.

Теорема 1. *При сделанных предположениях*

$$(X_n - qn)(\sigma\sqrt{n})^{-1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Мы доказали, что в модели с несколькими прыжками для случайной величины X_n выполнен закон больших чисел.

Теорема 2. *Пусть* $f(n) = n^{3/4+\delta}$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$(X_n - \mathsf{E}X_n)(f(n))^{-1} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \;\; n \to \infty.$$

Литература

1. R. Durrett, Random Graph Dynamics, Cambridge University Press, New York, 2007.
2. F. Machado, H. Mashurian, H. Matzinger, CLT for the proportion of infected individuals for an epidemic model on a complete graph, arXiV:1011.3601v1, 2010.