Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Нижние оценки для константы в аналоге неравенства Берри-Эссеена для обобщенных процессов Кокса.

Нефедова Юлия Сергеевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: julia_n@inbox.ru

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}(X_1 < x)$, удовлетворяющие моментным условиям

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \sigma^2 \equiv \mathbf{D}X_1 > 0, \quad \beta_{2+\delta} \equiv \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty, \tag{1}$$

для некоторого $0 < \delta \leq 1$.

Рассмотрим обобщенный процесс Кокса $S(t) = X_1 + \cdots + X_{N(t)}, \left(\sum_{i=1}^{0}(\cdot) \equiv 0\right)$, где $N(t)$ – случайная величина со смешанным пуассоновским распределением со структурным гамма-распределением $G_{r,s}(x)$ с параметром формы $r > 0$ и параметром масштаба $s = 1/t > 0$:

$$\mathbf{P}(N(t) = k) = \frac{1}{k!}\int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda} dG_{r,s}(\lambda) = \frac{t^{-r}}{\Gamma(r)k!}\int_0^\infty \lambda^{k+r-1} e^{-\lambda(1+1/t)} d\lambda.$$

При каждом $t > 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ предполагаются независимыми.

Известно, что при приведенных выше условиях (1) на моменты случайной величины X_1 и при $r > \delta/2$, для любого $t > 0$ справедлива оценка

$$\Delta_t = \sup_x \left| \mathsf{P}(S(t) < x\sigma\sqrt{rt}) - \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{r,r}(y) \right| \leq C(r;\delta) L_t^{2+\delta}, \tag{2}$$

где $C(r;\delta) = C(\delta)\Gamma(r - \frac{\delta}{2})/\Gamma(r)$, а $C(\delta)$ – такая же, что и в неравенстве Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (см. [2], [3]). $L_t^{2+\delta} = \beta_{2+\delta} t^{-\delta/2}/\sigma^{2+\delta}$ – ляпуновская дробь.

Впервые оценка (2) была доказана в работе [1] в 2006 году. В [2] приводится доказательство этого неравенства с наилучшими на сегодняшний день верхними оценками для $C(r;\delta)$. Однако нижние оценки для $C(r;\delta)$ найдены не были. Данная работа имеет своей целью восполнить этот пробел.

В терминах, введенных в работе [4], определим *верхнюю асимптотически правильную постоянную*

$$\overline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) = \limsup_{t\to\infty} \sup \Delta_t / L_t^{2+\delta}, \quad 0 < \delta \leq 1, \ r > 0, \tag{3}$$

где супремум берется по всем распределениям случайной величины X_1, для которой справедливы условия (1). Очевидно, $C(r;\delta) \geq \overline{C}_{\text{АП}}(r;\delta)$.

Теорема 1. *Для константы $\overline{C}_{\text{АП}}(r;\delta)$ справедлива следующая оценка:*

$$\overline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) \geq \frac{1}{2}\sup_{\gamma>0} \frac{\gamma^{\delta/2}}{(\gamma+1)^r} \cdot {}_2F_1\left(\left[\frac{r}{2}, \frac{r+1}{2}\right], 1, \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\right), \quad 0 < \delta \leq 1, \ r > \delta/2,$$

где ${}_2F_1$ – обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса.

На практике целесообразно применять неравенство (2) при малых значениях ляпуновской дроби $L_t^{2+\delta}$, тогда как в (3) значения ляпуновской дроби экстремального распределения могут быть (и на самом деле оказываются) больше единицы. Чтобы найти нижнюю оценку константы $C(r;\delta)$ для случая бесконечно малых значений ляпуновской дроби $L_t^{2+\delta}$, определим в терминах, введенных в работе [4], *нижнюю асимптотически правильную постоянную*

$$\underline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) = \limsup_{\ell\to 0}\limsup_{t\to\infty}\sup_{F\colon L_t^{2+\delta}=\ell}\Delta_t/\ell.$$

Очевидно, $\underline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) \le \overline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) \le C(r;\delta)$ при всех r и δ.

Теорема 2.*Для константы $\underline{C}_{\text{АП}}(r;\delta)$ при $r > \delta/2$ справедливы следующие нижние оценки:*

$$\underline{C}_{\text{АП}}(r;1) \ge \frac{1}{2}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2\gamma+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3535\ldots,$$

$$\underline{C}_{\text{АП}}(r;\delta) \ge \frac{r^{3/2}\sqrt{\pi}}{2^{2+\delta/2}\Gamma\left(\frac{3+\delta}{2}\right)\sqrt{2r+1}}\sup_{s>0}\frac{\left(1+\frac{s^2}{2r+1}\right)^{-1/2}+\frac{s^2}{2(2r+1)}-1}{s^{2+\delta}}, \quad 0<\delta<1.$$

Так, например, при $\delta = 1$ для случая $r = 1$, т. е. когда смешивающее распределение является показательным с параметром $1/t$, а случайная величина $N(t)$ имеет геометрическое распределение с параметром $(1+t)^{-1}$, при этом предельное (при $t\to\infty$) распределение для стандартизованной геометрической суммы $S(t)$ является распределение Лапласа, получились следующие оценки: $0.3535 \le \overline{C}_{\text{АП}}(1;1) \le C(1;1) \le 0.5391$. При $0<\delta<1$ $\underline{C}_{\text{АП}}(1;\delta) > 0$, а следовательно, порядок $O(t^{\delta/2})$ является правильным при $t\to\infty$ для оценок Δ_t, равномерных по F.

Литература

1. С. В. Гавриленко и В. Ю. Королев. Оценки скорости сходимости смешанных пуассоновских случайных сумм // Системы и средства информатики, ИПИ РАН, Москва, 2006, специальный выпуск, с. 248–257.

2. В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010, т. 17, вып. 1, с. 25–56.

3. Ю.С. Нефедова, И. Г. Шевцова. Двусторонние оценки для абсолютной константы в неравенстве Берри-Эссеена для пуассоновских случайных сумм // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Изд-во Пермского университета. Пермь, 2010, вып. 22, с. 121–128.

4. И. Г. Шевцова. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца // Теория вероятностей и ее применения, 2010, вып. 2, том 55, стр. 271-304.