Пример использования методики Fr-преобразования при решении задач математической теории волноводов

Мухартова Юлия Вячеславовна
аспирант
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: muhartova@yandex.ru

Во многих задачах математической теории волноводов возникает необходимость исследовать следующий объект:

$$u + A_1 u + A_2 u_z + A_3 u_{zz} = Kf \tag{1}$$

где A_1, A_2, A_3 и K – компактные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве *H*, а $f(z)$ - функция со значениями в *H*. В различных задачах функция *f* может быть финитной, экспоненциально убывающей при $z \to \pm$ или гармонически зависящей от *z*, но в любом случае она должна быть по крайней мере непрерывна.

Для того чтобы выделить единственное решение (1), необходимо поставить некоторое дополнительное условие на бесконечности. Исходя из физических соображений, можно утверждать, что это условие должно соответствовать расходящимся волнам в дальней зоне, если $f(z)$ стремится к нулю на бесконечности. Если же функция $f(z)$ является гармонической и удовлетворяет альтернативе Фредгольма, то решение задачи должно содержать гармоническую компоненту с соответствующей постоянной распространения. Одна из основных целей данной работы – показать, что использование в качестве такого условия наличия у решения обобщенного преобразования Фурье является вполне корректным.

На основании результатов М.В. Келдыша и М.Г. Крейна можно показать, что решение задачи

$$\hat{u} + A_1 \hat{u} + i\gamma A_2 \hat{u} - \gamma^2 A_3 \hat{u} = K\hat{f} \tag{2}$$

является мероморфной функцией γ, поведение которой при $\gamma \to \pm$ на действительной оси определяется поведением функции $\hat{f}(\gamma)$. В частности, если соответствующее (2) однородное уравнение имеет конечное число действительных собственных значений, то при достаточно больших по модулю действительных γ справедлива оценка

$$\left\| \hat{u}(\gamma) \right\| \le \mathrm{const} \cdot \left\| \hat{f}(\gamma) \right\| \tag{3}$$

При использовании Fr-образа функции $f(z)$ в качестве $\hat{f}(\gamma)$ решение (2) можно рассматривать как Fr-образ решения (1). Если соответствующее (2) однородное уравнение не имеет нулевых собственных значений, то благодаря асимптотике (3) $u(z) = \mathrm{Fr}[\hat{u}(\gamma)]$ является единственным решением (1), допускающим Fr-преобразование. Используя лемму Жордана и замыкая контур интегрирования в Fr-преобразовании в соответствующих полуплоскостях, можно показать, что данное решение удовлетворяет парциальным условиям излучения при $z \to \pm$.

Предложенная методика может быть проиллюстрирована на примере задачи о возбуждении колебаний финитным током $\mathbf{j} \cdot e^{-i\omega t}$ в полом цилиндрическом волноводе кругового сечения радиуса *R* с осью *Oz*, на границе которого выполняется импедансное условие $[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \varsigma [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]$, где ς - произвольная комплексная постоянная.

Пусть $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\} \cdot e^{-i\omega t}$- поле, которое возбуждалось бы током $\mathbf{j} \cdot e^{-i\omega t}$ в рассматриваемом волноводе, если бы его стенки были идеально проводящими. Выразим поле невязки $\{\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} - \{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ при помощи векторов Герца $\mathbf{\Pi}^e = \varphi(\rho, \theta, z) \cdot \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{\Pi}^m = \psi(\rho, \theta, z) \cdot \mathbf{e}_z$ и разложим функции φ и ψ, а также φ_0 и ψ_0, соответствующие случаю идеально проводящих стенок, в ряды Фурье по θ :

$\varphi(\rho,\theta,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\theta}\varphi_m(\rho,z)$ и т.д. Решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_\rho \hat{\varphi}_m + \left(\omega^2 - \gamma^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\hat{\varphi}_m = 0, \\ \Delta_\rho \hat{\psi}_m + \left(\omega^2 - \gamma^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\hat{\psi}_m = 0, \\ \left. -i\omega\varsigma \dfrac{d\hat{\varphi}_m}{d\rho} + \dfrac{m\gamma}{R}\varsigma\hat{\psi}_m - \left(\omega^2-\gamma^2\right)\hat{\varphi}_m \right|_{\rho=R} = \left. i\omega\varsigma \dfrac{d\hat{\varphi}_m^{(0)}}{d\rho} - \dfrac{m\gamma}{R}\varsigma\hat{\psi}_m^{(0)} \right|_{\rho=R}, \\ \left. i\omega \dfrac{d\hat{\psi}_m}{d\rho} + \dfrac{m\gamma}{R}\hat{\varphi}_m + \varsigma\left(\omega^2-\gamma^2\right)\hat{\psi}_m \right|_{\rho=R} = -\varsigma\left(\omega^2-\gamma^2\right)\hat{\psi}_m^{(0)}\Big|_{\rho=R}, \end{cases} \tag{4}$$

будет играть роль Fr-образов коэффициентов Фурье функций $\varphi(\rho,\theta,z)$ и $\psi(\rho,\theta,z)$. Для всех γ, не являющихся корнями уравнения $\mathrm{Det}(\gamma,\lambda(\gamma)) = 0$, где $\lambda(\gamma) = \omega^2 - \gamma^2$ и

$$\mathrm{Det}(\gamma,\lambda) = \varsigma^2\lambda\left[J'_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)\right]^2 - i\omega\left(1+\varsigma^2\right)\lambda^{3/2}J_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)J'_m\left(\sqrt{\lambda}R\right) - \varsigma\left(\lambda^2 + \left(\frac{m\gamma}{R}\right)^2\right)J_m^2\left(\sqrt{\lambda}R\right), \tag{5}$$

решение задачи (4) может быть найдено как

$$\left(\hat{\varphi}_m \quad \hat{\psi}_m\right)^T = \left(A_m(\gamma) \quad B_m(\gamma)\right)^T J_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,\rho\right), \tag{6}$$

где введены обозначения:

$$A_m = \frac{\varsigma}{\mathrm{Det}(\gamma,\lambda)}\left.\left\{\left(i\omega\sqrt{\lambda}J'_m\left(\sqrt{\lambda}R\right) + \varsigma\lambda J_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)\right)\left\{i\omega\frac{d\hat{\varphi}_m^{(0)}}{d\rho} - \frac{m\gamma}{R}\hat{\psi}_m^{(0)}\right\} + \varsigma\lambda\frac{m\gamma}{R}J_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)\hat{\psi}_m^{(0)}\right\}\right|_{\rho=R}$$

$$B_m = \frac{-\varsigma}{\mathrm{Det}(\gamma,\lambda)}\left.\left\{\frac{m\gamma}{R}J_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)\left\{i\omega\frac{d\hat{\varphi}_m^{(0)}}{d\rho} - \frac{m\gamma}{R}\hat{\psi}_m^{(0)}\right\} - \lambda\left(i\omega\varsigma\sqrt{\lambda}J'_m\left(\sqrt{\lambda}R\right) + \lambda J_m\left(\sqrt{\lambda}R\right)\right)\hat{\psi}_m^{(0)}\right\}\right|_{\rho=R}$$

Если ω не совпадает ни с одной из частот отсечки, то асимптотика коэффициентов A_m и B_m при $\gamma \to \pm$ обеспечивает равномерную сходимость интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_\varphi} e^{i\gamma z}\hat{\varphi}_m(\gamma,\rho)\,d\gamma \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{C_\psi} e^{i\gamma z}\hat{\psi}_m(\gamma,\rho)\,d\gamma\,,$$

в которых контуры C_φ и C_ψ совпадают с действительной осью всюду, кроме некоторых окрестностей действительных полюсов подынтегральных функций. При этом отрицательные полюса обходятся по верхней полуплоскости, а положительные – по нижней. Данные интегралы представляют собой коэффициенты Фурье $\varphi_m(\rho,z)$ и $\psi_m(\rho,z)$ для поля невязки, удовлетворяющего парциальным условиям излучения.

Литература

1. Келдыш М.В. (1985) О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. Гл. I. Избранные труды. Математика. М.: Наука,. С. 305-320.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. (1965) Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, главная редакция физ.-мат. литературы, 1965 г.
3. Боголюбов А.Н., Малых М.Д. (2003) Замечание об условиях излучения для нерегулярного волновода// ЖВМ и МФ.. Т. 43. № 4. С. 585-588.
4. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В. (2006) Об удовлетворяющем условию излучения решении краевой задачи для произвольного эллиптического оператора// ЖВМ и МФ.. Т. 46. №12. С. 2230-2236