

Решение задачи математического проектирования волновода с киральным заполнением

Мосунова Настасья Александровна
аспирантка

Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
E-mail: nam@ibrae.ac.ru

Введение. Развитие различных отраслей радиоэлектронной промышленности потребовало разработки принципиально новых материалов, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами. К подобным материалам относятся киральные среды. Основным моментом, отличающим их от изучавшихся ранее сред, является то, что размер a включений соизмерим с расстоянием d между включениями. Исследования волноводящих систем с киральным заполнением проводятся методами математического моделирования [1]. Только таким образом удаётся получить приемлемое соответствие численных расчётов и результатов физического эксперимента.

Постановка и решение задачи синтеза. В работе рассматривается решение задачи синтеза прямоугольного кирального волновода, обладающего большой полосой частот одномодового режима. Задача синтеза ставится следующим образом: по заданным значениям частот отсечки первой и второй мод прямоугольного кирального волновода нужно определить значение диэлектрической проницаемости и параметра киральности, при которых первые две моды будут максимально разнесены.

Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноводящих систем заключается в рассмотрении таких задач как математически некорректных с использованием для их решения метода регуляризации А.Н.Тихонова. Этот подход был впервые предложен в работах А.Г.Свешникова и А.С.Ильинского [2]. Одним из преимуществ данного метода является то, что созданный алгоритм решения обратной задачи, может эффективно применяться для решения самых разнообразных задач математического проектирования - для этого лишь нужно менять блок решения прямой задачи.

Вариационная постановка задачи синтеза киральных волноводов, обладающих большой полосой частот одномодового режима, формулируется следующим образом: необходимо определить значение параметра диэлектрической проницаемости ϵ и параметра киральности χ из условия минимума на Q тихоновского функционала

$$M^\alpha[\epsilon, \chi] = \frac{1}{|\omega_{cutoff1} - \omega_{cutoff2}|} + \alpha \Omega[\epsilon, \chi] \quad (1)$$

где Q – множество, с помощью которого накладываются ограничения на синтезируемые параметры, $\Omega[\epsilon, \chi]$ - стабилизатор Тихонова, α – параметр регуляризации, $\omega_{cutoff1}$ - частота отсечки первой моды, $\omega_{cutoff2}$ - частота отсечки второй моды.

Требования физической реализуемости в данном случае состоят в условии положительности диэлектрической проницаемости $1 \leq \epsilon_{\min} < \epsilon \leq \epsilon_{\max}$ и параметра киральности $0 < \chi_{\min} < \chi \leq \chi_{\max}$ (в данной работе, $\epsilon_{\max} = 100$ и $\chi_{\max} = 100$).

При решении задачи синтеза возникает необходимость в минимизации функционалов в ограниченных областях. В работе для этой цели применяется метод скользящего допуска. Данный метод позволяет искать минимум функции при наличии ограничений на область как в виде неравенств, так и в виде равенств.

Наибольшую трудность при решении задачи синтеза представляет разработка численного алгоритма решения прямой задачи. Требуется, чтобы алгоритм был как можно более эффективным, т.к. при решении задачи синтеза необходимо многократно решать прямую задачу нахождения значений частот отсечки двух первых мод. В данной работе для решения прямой задачи использовался метод смешанных конечных элементов.

Постановка и решение прямой задачи. Рассмотрим прямоугольный волновод с киральным заполнением. Поле в таком волноводе в отсутствие токов и зарядов описывается системой уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{H} &= -ik \underline{D} \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= ik \underline{B} \end{aligned} \quad (2)$$

где $\underline{H}, \underline{E}$ - вектора напряженности магнитного и электрического поля, $\underline{D}, \underline{B}$ - электрическая и магнитная индукции, $k = \frac{\omega}{c}$.

Материальные уравнения киральной среды возьмём в наиболее общем виде

$$\begin{aligned} \underline{D} &= a_{11} \underline{E} + a_{12} \underline{H} \\ \underline{B} &= a_{21} \underline{E} + a_{22} \underline{H} \end{aligned} \quad (3)$$

С граничным условием

$$\underline{E} \times \underline{n} \Big|_{\alpha\Omega} = 0 \quad (4)$$

В силу регулярности системы вдоль оси z , $E(x, y, z) = E(x, y) e^{\gamma z}$, где γ - постоянная распространения. После некоторых преобразований систему (2) можно привести к задаче вида

$$\gamma^2 \underline{A} \underline{X} + \gamma \underline{B} \underline{X} + \underline{C} \underline{X} = 0 \quad (5)$$

Матрицы \underline{A} , \underline{B} и \underline{C} сформируем, используя метод смешанных конечных элементов. Для этого разложим поля по базисным функциям

$$E_x = \sum_{ij} E_{ij}^x N_j(y) p_{i,i+1}(x), \quad (6)$$

$$E_y = \sum_{ij} E_{ij}^y N_i(x) p_{j,j+1}(y), \quad (7)$$

$$E_z = \sum_{ij} E_{ij}^z N_i(x) N_j(y), \quad (8)$$

$$\text{где } N_k(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\Delta \xi}, \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}) \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\Delta \xi}, \xi \in (\xi_{k-1}, \xi_k) \end{cases}; \quad p_{k,k+1}(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}) \\ 0, \xi \notin (\xi_k, \xi_{k+1}) \end{cases}; \quad k=i, j, \text{ а } \xi = x, y.$$

Подставляя данные разложения в задачу (5), вычисляя интегралы перекрытия и сводя нелинейную задачу к линейной с помощью замены переменных $\underline{Y} = \gamma \underline{X}$, получаем обобщённую задачу на собственные значения, решениями которой являются значения постоянной распространения прямоугольного кирального волновода.

Заключение. Рассмотренная задача важна при проектировании линий связи с частотным уплотнением каналов информации. На основе описанных методов разработан блок программ на языке Fortran и получены численные значения. В частности, для кирального волновода со сторонами $a=2b$ первые две моды максимально разнесены при $\varepsilon = 1.6$ и $\chi = 2.7$.

Список литературы

1. А.Н. Боголюбов, Н.А. Мосунова, Д.А. Петров. "Математическое моделирование киральных волноведущих систем", Журнал радиоэлектроники РАН, электронный журнал, №7 – июль 2005 г.
2. А.Г.Свешников, А.С.Ильинский. Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР, 1972, Т. 204, №5, с. 1077-1080