Время ожидания в системе с повторными вызовами и ограниченным числом источников

Ярмухаметов Андрей Ринатович
студент
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: ayarmuhametov@yandex.ru

Системы с большим количеством сервисов, в которых источник, не получивший соединения может пытаться установить это соединение снова, используются в телефонных сетях, в сфере компьютерных технологий и в других областях коммуникаций. Простейшей моделью системы с несколькими средствами обслуживания и с конечной группой источников повторных вызовов служит M/M/c система с экспоненциально распределенной интенсивностью возвращения.
Основной целью статьи является исследование времени ожидания для M/M/c модели с конечным числом источников в группе повторных вызовов. Предполагается, что с увеличением этого числа, время ожидания в M/M/c системе с конечной группой будет стремиться ко времени ожидания в M/M/c системе с любым допустимым числом источников повторных вызовов.
Рассматривается c-канальная система массового обслуживания, в которой первично прибывшие клиенты прибывают согласно распределению пуассона с интенсивностью λ. Обслуживащее устройство - c параллельно работающих сервисов с интенсивностью обслуживания v. Таким образом имеется M/M/c модель. Если вновь прибывший клиент находит все сервисы занятыми, он покидает систему, попадает в группу источников повторных вызовов, и производит повторные попытки получения обслуживания с интенсивностью μ.
В данной модели для простоты расчетов предполагается, что число клиентов в группе повторных вызовов ограничено некоторой величиной L.
Тогда состояние, в котором находится система может описываться простейшим процессом $X = \{(C(t),N(t)):t\geq 0\}$, где C(t) - число требований в зоне обслуживания, N(t) - число источников повторных вызовов в момент t. Процесс X обладает конечным пространством событий $S = \{(i,j): 0\leq i\leq c,\ 0\leq j\leq L\}$.

Обозначим $P_{ij} = \lim_{t\to\infty}(C(t)=i, N(t)=j)$, $(i,j)\in S$

Можно составить следующую систему линейных уравнений

$$(\lambda + i\nu + j\mu)P_{ij} = \lambda(1-\delta_{i0})P_{i-1,j} + (j+1)\mu(1-\delta_{i0})(1-\delta_{jL})P_{i-1,j+1} + (i+1)\nu P_{i+1,j}, \quad 0\leq i\leq c-1,\ 0\leq j\leq L$$

$$(\lambda(1-\delta_{jL}) + c\nu)P_{cj} = \lambda P_{c-1,j} + (j+1)\mu(1-\delta_{jL})P_{c-1,j+1} + \lambda(1-\delta_{j0})P_{c,j-1}, \quad 0\leq j\leq L$$

$$\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{L} P(i,j) = 1$$

Решить эту систему можно, например, с помощью метода Гаусса.

Математическое ожидание ожидания времени обслуживания может быть посчитано следующим образом:

$$\mathrm{E}W = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{L} jP(i,j)$$

Среди полученных асимптотических закономерностей можно выделить следующую:

$$\frac{P(m+1,n)}{P(m,n)} \approx \frac{\mu}{\nu}\frac{n}{m+1} \quad \text{при} \quad L\to\infty, \; n\to\infty \; (n\le L)$$

Литература

1. Waiting time in the M/M/c queue with finite retrial group Jesus R. Artalejo, A. Ǵomez-Corral