Об асимптотике решений разностного уравнения второго порядка со степенной нелинейностью

Харьков Виталий Михайлович
аспирант
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
kharkov_v_m@mail.ru

В настоящей заметке рассматривается разностное уравнение второго порядка вида

$$\Delta^2 y_n = \alpha p_n |y_n|^{\sigma} sign\ y_n \quad (n \in N), \tag{1}$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p_n > 0, \sigma \in R/\{0,1\}$, для которого исследуется вопрос об асимптотическом поведении его решений при *n* стремящимся к $+\infty$.

Уравнение (1) является дискретным аналогом известного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера, асимптотические свойства которого были достаточно подробно изучены в работах [1-2]. В данной работе предпринята попытка перенести методику исследования из [2] на аналогичный класс разностных уравнений, дополнив при этом результаты, изложенные в [3] и [4], где для уравнения вида (1) были получены достаточные условия существования решений асимптотически эквивалентных *cn*, а также принадлежащих классам дискретных функций c_0 и l_2. Здесь же, в отличие от результатов этих работ, удалось получить решения также и из других классов функций.

Определение 1. *Решение* $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ *уравнения (1) будем называть P(λ)-решением, если последовательность* $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ *удовлетворяет предельным равенствам:*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0,\ y_0 = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty; \end{cases} \text{ и } \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} = \lambda.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\sum_{m=1}^{+\infty} m\, p_m = +\infty$. *Тогда для существования у уравнения (1) P(λ)-решений, где* $\lambda \in R/\{-1; -0{,}5; 0\}$, *необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$\alpha\lambda(1-\sigma) > 0,\ \left|\int_A^{y_0} \frac{dy}{|y|^{\sigma}}\right| = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 p_n}{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} = (1-\sigma)(1+\lambda),$$

где A принадлежит окрестности y_0. *Более того, каждое положительное P(λ)-решение, где* $\lambda \in R/\{-1;-0{,}5;0\}$, *допускает при* $n \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$y_n = \left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)],\ \Delta y_n = \frac{\lambda+1}{n}\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)].$$

Литература

[1] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. (1990) Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука.

[2] Евтухов В.М. (1982) Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка//Сообщ. АН ГССР. Т. № 3.

[3] Migda M., Migda J. (1998) Asymptotic properties of the solutions of the second order difference equation//Archivum mathematicum(Brno). V. 34.

[4] Agarwal Ravi P. (2000) Difference equations and inequalities. Marcel Dekker. New York.