Построение нормальной формы для одного класса векторных уравнений с запаздыванием[1]

Глазков Дмитрий Владимирович[2]

аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E–mail: glazkov_d@mail.ru

Рассматривается математическая модель, основанная на векторном дифференциальном уравнении с запаздыванием

$$y' = a\cdot\left(y - y(t-1) - F(y)\right), \tag{1}$$

где $y(t): R \to R^m$ — вектор-функция, $F(y): R^m \to R^m, F(0)=0,$ — векторное поле, имеющее в нуле порядок малости выше первого, a — вещественный скалярный параметр. Устойчивость нулевого состояния равновесия определяется корнями характеристического уравнения $\lambda = a(1-e^{-\lambda})$. При критическом значении параметра $a=1$ нулевое решение теряет устойчивость. Ставится задача исследования локальной динамики (1) при значениях параметра, близких к критическому.

Полагая $a = 1+\varepsilon$, сформулируем основной результат. Локальная динамика системы (1) в некоторой окрестности нулевого решения определяется в главном динамикой нормальной формы, которая имеет вид

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{1}{3}\frac{DF}{Dx}\dot{x} - \dot{x}\right) + 2F(x) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь точками обозначается покомпонентное дифференцирование вектор функции $x(s): R \to R^m$ по «медленному» времени $s=\sqrt{\varepsilon}t$, $\dfrac{DF}{Dx}$ — матрица Якоби.

***

В качестве примера рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием [1]:

$$y' = a\cdot\left(y - y(t-1) - f(y)\right) \tag{3}$$

в случаях, когда нелинейная функция f имеет вид: $f(y)=y^n$, n — нечетное, $f(y)=|y|y^{n-1}$, n — четное. Отметим, что уравнения типа (3) возникают также в задаче об устойчивости состояний равновесия квазинормальной формы, полученной в [2].

Теорема. Скалярное уравнение вида (2), возникающее при изучении задачи (3) имеет единственное периодическое решение, асимптотически орбитально устойчивое при $s \to \infty$.

Доказательство теоремы на основе [3,4] и характеристики предельного цикла приведены в [5].

***

Таким образом, задача исследования динамики системы дифференциальных уравнений с запаздыванием с бесконечным числом степеней свободы свелась к существенно более простой задаче исследования системы ОДУ с конечным числом «параметров порядка».

Литература

1. Erneux T., Walther H. Bifurcation to large period oscillations in physical systems controlled by delay // Phys. Rev. E. 2005. V.72. №066206.
2. Глазков Д.В. Простейшие устойчивые режимы в модели Ланга-Кобаяши с большим запаздыванием // Труды XXVII Конференции молодых ученых ММФ МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005, С. 27—33.
3. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. М.: Высш. шк., 2001.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1991.
5. Глазков Д.В. Нормализация одного уравнения с запаздыванием и бифуркация, приводящая к циклу бесконечного периода // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 9 / ЯрГУ, 2007.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).

[2] Автор благодарит Кащенко С.А. и Глызина С.Д. за постановку задачи и внимание к работе.