О нахождении супремума ожидаемой полезности в модели с одним риском

Черный Владимир Александрович

студент

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

E–mail: mmblack@bk.ru

Изучается взаимосвязь между решениями двух известных задач: нахождения супремума от ожидаемого значения полезности от случайной величины на некотором вероятностном пространстве и нахождение инфимума в двойственной к этой задаче.

Рассматривается вещественная неубывающая выпуклая вниз дифференцируемая функция $U(x)$, определенная на $(0,+\infty)$, такая что $U'(0)=+\infty$, $U'(+\infty)=0$. И пусть на некотором вероятностном пространстве (Ω,F,P) задана случайная величина ξ, $P(\xi>0)>0$ и $P(\xi<0)>0$. Обозначим за $u(x)$ функцию, равную $\sup\{E[U(x+\alpha\xi)]\}$ при $x > 0$, где sup берется по множеству допустимых значений α.

Введем вспомогательную функцию $V(x):=\sup[U(y) - xy]$ – преобразование Фенхеля от $U(x)$, где sup берется по y. И рассмотрим множество Q мер, абсолютно непрерывных относительно P таких, что $Eq\xi = 0$. Пускай $v(y)$ задается формулой: $v(y):=\inf\{E(y\cdot dQ/dP)\}$. Тогда для некоторого класса вероятностных пространств (в частности для конечного) функций $v(y)$ связана преобразованием Фенхеля с $u(x)$.

Также в существенной взаимосвязи находятся величины dQ^*/dP и $\alpha^*\cdot\xi$, то есть – элементы, на которых достигается inf и sup в соответствующих формулах. А именно верно следующее: в случае равенства значения y и значения $u'(x)$ получаем $dQ^*/dP = c\cdot U'(x+ \alpha^*\cdot\xi)$.

В актуарной математике: страховании жизни часто рассматривают выпуклые вниз неубывающие функции полезности. Тогда первое применение данной задачи состоит в нахождении супремума полезности от одного линейного риска при данной функции полезности, а также значения коэффициента α, на котором будет достигаться супремум.

Литература

1 Оптимальное управление. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.