Секция «9. Количественные методы и информационные технологии в финансах и экономике»

Применение теории игр в процессе обеспечения безопасности

Веденеев Дмитрий Александрович
Студент
Финансовый университет при Правительстве РФ, Факультет прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: ridatri@yandex.ru

Научный руководитель
к. ф.-м. н., профессор Лабскер Лев Григорьевич

Методы теории игр в последнее время все чаще применяется для моделирования и принятия решений в различных сферах. Немаловажную роль данная теория играет в процессе обеспечения безопасности.

Стоит отметить, что использование аппарата теории игр в обеспечении безопасности, в первую очередь, связано с подклассом динамических игр с несовершенной информацией. Динамический класс будет рассмотрен нами, так как игры, относящиеся к нашей тематике, протекают не статично, то есть игроки делают ходы по очереди. Несовершенство информации связано с тем, что, например, в реальной жизни нападающий не знает обо всех шагах и мерах безопасности, предпринятых охраной, так и охрана не знает точных планов нападающих.

Рассматриваемая тема обеспечения безопасности в последнее время набирает всё большую актуальность из-за обострения политической ситуации на Ближнем Востоке (если мы говорим о терроризме) и из-за возрастающей важности конфиденциальной информации (если мы говорим о, например, хакерских атаках). Применение теории игр в данном случае позволяет построить динамическую защиту, которая позволяет лучше справляться с различными угрозами. Например, в одном из крупнейших аэропортов США – аэропорте Лос-Анджелеса – действует система, основанная на применении теории игр, которая обеспечивает оптимальное распределение ресурсов на КПП и патрулей с собаками.

К сожалению, на сегодняшний день не так много систем безопасности используют алгоритмы теории игр, однако вполне вероятно, что в будущем теория игр и системы, основанные на её принципах, будут играть важнейшую роль в обеспечении безопасности, так как они позволяют оптимально распределить ограниченные ресурсы для обеспечения максимального уровня защиты.

Понятие динамической игры

Динамическая игра — более сложный объект, чем статическая игра. Для того чтобы описать динамическое игровое взаимодействие нескольких субъектов, нам необходимо знать две вещи.

Во-первых, это последовательность действий игроков при возможных сценариях развития событий в игре, а также выигрыши, получаемые игроками в зависимости от произошедших в игре событий. Во-вторых, необходимо знать, что каждому игроку может быть известно относительно ходов, уже сделанных другими игроками. В первом случае, мы говорим о дереве игры; во втором — об информационных множествах игроков.

Дерево игры.

Во-первых, необходимо определить множество игроков. Для того чтобы моделировать случайные события, нужно определить еще одного игрока — природу. Таким образом, мы имеем I = {1, ... , N }∪{природа}.

Во-вторых, нужно определить, в каком порядке игроки ходят, и какие действия им доступны на каждом ходе. Эту информацию мы можем изобразить в виде дерева (или графа) игры. Дерево игры состоит из вершин и соединяющих их отрезков. Каждая вершина означает либо момент принятия решения одним из игроков, либо момент окончания игры. В дереве игры всегда существует одна вершина, соответствующая началу игры.

Наконец, в-третьих, нам надо определить, как выигрыши игроков зависят от ходов, которые были сделаны. Формально, для каждой конечной вершины дерева игры мы определяем выигрыши для каждого игрока.

Информационные множества и стратегии в динамической игре.

Пусть Γ — игра в развернутой форме. Информационное множество игрока i есть совокупность вершин, в которых этот игрок делает ход, со следующими свойствами:

1. Каждая вершина игрока i содержится в одном и ровно одном информационном множестве.

2. Пусть h_i — информационное множество игрока i. Во всех вершинах, входящих в hi , игроку доступен один и тот же набор действий $A(h_i)$.

Сигнальные игры. Байесово равновесие.

Рассмотрим один из важнейших типов динамических игр с несовершенной информацией – **сигнальные игры**, однако сначала надо дать определение классу игр с наблюдаемыми действиями:

Игроки ходят по очереди, причем все ходы всех игроков наблюдаемы; при этом частной информацией является только тип игрока, определяющий его предпочтения относительно различных исходов игры.

Формально, можно дать такое определение:

Пусть Γ — игра в развернутой форме с совершенной информацией, $T = T_i \times \cdots \times T_N$ — множество типов игроков, $P = P_i \times \cdots \times P_N$ — распределение вероятностей на T, u_i — функция полезностей игрока i, определяющая его выигрыш в зависимости от конечной вершины и его типа t_i , $u = (u_i)_{i=1}^N$. Тогда $\langle \Gamma, T, P, u \rangle$ — **игра с наблюдаемыми действиями**.

Вернемся к определению сигнальной игры:

Итак, **сигнальная игра** – это игра с наблюдаемыми действиями, в которой

1. Два игрока — ведущий S и получатель R,
2. У получателя один тип, у ведущего — больше одного,
3. Первый ход делает ведущий, второй ход — получатель.

Действительно, ведущий, тип которого неизвестен, может сигнализировать свой тип второму игроку, выбирая какое-то наблюдаемое действие.

Пусть μ – система вер, m – выбор стратегии игроком S из множества действий M, a – выбор стратегии игроком R из множества действий A, u_i – функция полезности игрока i, t – тип игрока S из множества типов T.

Тогда **совершенное байесово равновесие** в чистых стратегиях в сигнальной игре есть набор $(m^*(\cdot), a^*(\cdot), \mu(\cdot\,|\,\cdot))$, такой, что

1. Для любого $m \in M$, $a^*(m)$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока R при системе вер $\mu(\bullet|\bullet)$, то есть для всех $a' \in A$, $t \in T$

$$\sum\nolimits_{t\in T} \mu\,(\mathrm{t}\,|\,\mathrm{m})\,\mathrm{u_R}\,(\mathrm{t},\,\mathrm{m},\mathrm{a}^*\,(\mathrm{m})) \geq \sum\nolimits_{t\in T} \mu\,(\mathrm{t}\,|\,\mathrm{m})\,\mathrm{u_R}\left(\mathrm{t},\,\mathrm{m},\mathrm{a}^{'}\right)$$

2. Для всех $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$, действие игрока S $m^*(t)$ максимизирует его выигрыш при условии, что игрок R будет играть равновесную стратегию $a^*(\cdot)$:

$u_S\,(t,\,m^*\,(t)\,,\,a^*\,(m^*\,(t))) \geq u_S\left(t,\,m^{'},\,a^*\left(m^{'}\right)\right)$ для всех $\mathrm{m}' \in \mathrm{M}$.

3. Для всех $\mathrm{m} \in \mathrm{M}$, таких, что если существует $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$, такой, что $\mathrm{m}*\,(\mathrm{t}) = \mathrm{m}$, вера игрока R после хода m определяется по правилу Байеса:

$$\mu\,(t\,|\,m) = \frac{p\,(t)}{\sum_{t'\in T} p\,(t')}$$

где p(t) — вероятность, что игрок S имеет тип $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$.

Первые два требования в этом равновесии — секвенциальная рациональность игроков. Третье требование — согласованность системы вер со стратегиями игроков.

Пример

Рассмотрим игру, где рассматривается обеспечение безопасности на контрольно пропускном пункте некоего объекта, например аэропорта.

Предположим, что число работников службы охраны (игрок 2) недостаточно для того, чтобы проверить всех посетителей. Таким образом, у охраны есть две чистые стратегии: проверить пассажира (p) или нет (n).

Пассажиры (игрок 1) же могут быть двух типов: мирный (M) и террорист (T), который стремится пронести на режимный объект некое устройство. У пассажиров есть две чистые стратегии: взять с собой небольшую ручную кладь (K) или объемный рюкзак (R). За разрешение пронести рюкзак на борт приходится платить c_1 денежных единиц, однако для террориста эти издержки не играют роли, так как устройство настолько большое, что не помещается в кладь, поэтому террористу приходится привлекать сообщника, неся при этом издержки c_2 денежных единиц, если он все же решил нести ручную кладь. Для упрощения предположим, что издержки равны, то есть $c_1 = c_2 = c$.

Охрана предполагает, что террорист, скорее всего, предпочтет взять на борт рюкзак, а мирный пассажир – легкую ручную кладь.

Определим выигрыши игроков:

Игрок 1 выигрывает 1, если его не проверили, и 0 в противном случае. Игрок 2, в свою очередь, выигрывает 1, если охрана проверила террориста или не проверила мирного, и 0, если она ошиблась с выбором.

Пусть s(1), s(2) $\in$ {R, K}— ходы первого игрока в зависимости от его типа. Пусть o(R), o(K) $\in$ {p, n}— ходы второго игрока в зависимости от того, каким был ход первого игрока.

Пусть λ – вероятность того, что пассажир окажется мирным.

Дерево этой игры представлено на рисунке:

Найдем совершенное байесово равновесие:

1. Для нахождения равновесия в этой игре мы должны ввести веры μ_R, $\mu_K \in [0,\,1]$. Первая из этих двух величин — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он выбрал рюкзак. Вторая величина — вероятность, с которой вошедший имеет тип 1 в том случае, если он несет ручную кладь. Система вер является согласованной со стратегией игрока 1, если она удовлетворяет следующим условиям:

$(a)\,\mu_R = \lambda,\ \mu_K \in [0,\,1]$, если $s\,(1) = R,\ s\,(2) = R\,(b)\,\mu_R = 1,\ \mu_K = 0$, если $s\,(1) = R,\ s\,(2) = K\,(c)\,\mu_R = 0,\ \mu_K = 1$, если $s\,(1) = K,\ s\,(2) = R\,(d)\,\mu_R \in [0,\,1]\,,\ \mu_K = \lambda$, если $s\,(1) = K,\ s\,(2) = K$Найдем, каким условиям удовлетворяет стратегия игрока 2, если она рациональна относительно системы вер $(\mu_R,\,\mu_K)$. Ожидаемый выигрыш охраны в информационном множестве R — то есть если ход игрока 1 был R — при собственном ходе (p) равен

$$E\left(u_2\left(\cdot,\,R,\,p\right)\right) = \mu_R * u_2\left(1,\,R,\,p\right) + \left(1-\mu_R\right) * u_2(2,\,R,\,h) = 1-\mu_R \quad ,$$

а при собственном ходе (n) –

$$E(u_2(\cdot,\,R,\,n)) = \mu_R \cdot u_2(1,\,R,\,n) + (1-\mu_R)\cdot u_2(2,\,R,\,n) = \mu_R \quad .$$

Аналогично получим выигрыши в информационном множестве K.

Следовательно, для s $\in$ {R,K}мы должны иметь

$$o\,(s) = \begin{cases} p, & \mu_{\mathrm{s}} < 1/2 \\ \{p,n\}\,, & \mu_{\mathrm{s}} = 1/2 \\ n, & \mu_{\mathrm{s}} > 1/2 \end{cases}$$

1. Каким должна быть стратегия игрока 1, в зависимости от стратегии игрока 2? При с <1 мы получим

$$(s\,(1)\,,s\,(2)) = \begin{cases} (R,K)\,, & o\,(R) = p,\,o\,(L) = p \\ (K,K)\,, & o\,(R) = p,\,o\,(L) = n \\ (R,R)\,, & o\,(R) = n,\,o\,(L) = p \\ (L,H)\,, & o\,(R) = n,\,o\,(L) = n \end{cases}$$

При с >1 мы будем иметь (s(1), s(2)) = (R, K) вне зависимости от o(R) и o(K).

Равновесием в этой игре является набор $(s^*(1),\,s^*(2),\,o^*(H),\,o^*(L),\,\mu_R^*,\,\mu_K^*)$, удовлетворяющий всем трем перечисленным выше условиям. Число и тип равновесий зависят от значения параметра с:

1. Если с <1 и р $\geq 1/2$, то равновесия два:

$$(a)\ s^*\left(1\right) = s^*\left(2\right) = R,\ o^*\left(R\right) = n,\ o^*\left(K\right) = p,\ \mu_R^* = \lambda,\ \mu_K^* \in [0,1/2]$$

(b) $s^*(1) = s^*(2) = K$, $o^*(R) = p$, $o^*(K) = n$, $\mu_K^* = \lambda$, $\mu_R^* \in [0, 1/2]$ 2. Если с <1 и р $<1/2$, то равновесия в чистых стратегиях нет.

3. Если с >1, то равновесие в чистых стратегиях одно: $s^*(1) = R$, $s^*(2) = K$, $o^*(R) = n$, $o^*(K) = p$, $\mu_R^* = 1$, $\mu_K^* = 0$. Мы видим, что возможны два типа равновесий. Первые два равновесия являются смешивающими, в которых игроки 1 разных типов выбирают одно и то же действие. То есть, в нашей истории, это означает, что и террорист, и мирный будут брать с собой один и тот же вид сумки. В каком случае это возможно? Во-первых, необходимо, чтобы число мирных пассажиров было достаточно большим $\lambda \geq \frac{1}{2}$. В таком случае охрана, видя, что вошедший несет “то же, что и все”, вряд ли его проверит, так как вероятность проверить обычного пассажира будет слишком велика. Во-вторых, необходимо, чтобы издержки были ниже, чем издержки от проверки. Если оба типа игроков выбирают одинаковые сумки, то обязательно получится так, что для одного из них этот выбор приведет к издержкам. Если эти издержки слишком высоки, то он сможет увеличить свой выигрыш, выбрав сумку без издержек — даже если возрастет вероятность проверки.

Второй тип равновесий — разделяющие, в которых игроки 1 разных типов выбирают разные сумки. В нашем случае, такое равновесие одно, в котором мирный будет выбирать кладь, а террорист — рюкзак. Такое равновесие будет возможно, если издержки от выбора “не той” сумки более высоки, чем издержки от проверки.

Литература

1. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. «Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом». Учебное пособие. – М.: Дело, 2001. – 464 с.

2. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн «Теория игр и экономическое поведение», М., — изд. «Наука», 1970, 707 с.

3. В. Бусыгин, С. Коковин, Е. Желободько, А. Цыплаков. 1999. «Микроэкономический анализ несовершенных рынков».- TEMPUS (TACIS), NSU, Новосибирск.

Иллюстрации

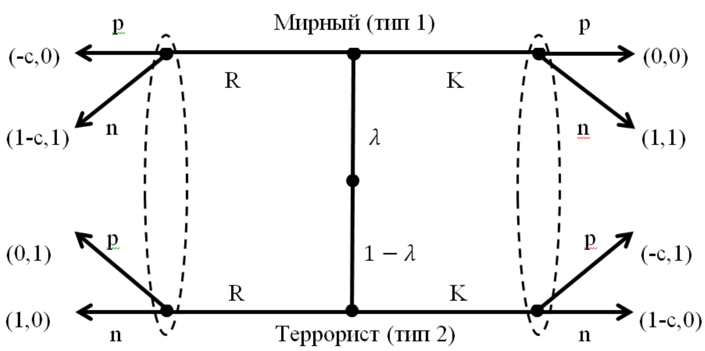

Рис. 1: Дерево игры