Секция «9. Количественные методы и информационные технологии в финансах и экономике»

Применение марковских цепей в системах автострахования Бонус-Малус

Исправников Антон Геннадьевич
Студент
Финансовый университет при Правительстве РФ, Факультет прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: ispanton@yandex.ru

Научный руководитель
к. ф.-м. н. Аль-Натор Муххамед Субхи

Изначально в структуре тарифов автомобильного страхования априорная классификация рисков не до конца эффективна, поэтому страховщики прибегают к апостериорной классификации. Как правило, апостериорный процесс классификации рисков вводится с использованием систем бонус-малус (СБМ), которые подразумевают уменьшение премии (бонус) для аккуратного водителя и её увеличение (малус) для небрежного водителя. По сути, СБМ основаны на изменении следующих величин: номер класса, правила перехода из одного класса в другой, исходный класс и степень наказания (в качестве штрафа). Как правило, СБМ применяются при обязательном страховании автогражданской ответственности.

По мере введения СБМ наблюдалось значительное уменьшение средней суммы премии благодаря чрезмерной концентрации страхователей в классах с низким уровнем премии (бонусах-классах), а также неэффективной системе наказания неаккуратных водителей [2]. Это уменьшение вызвало финансовый дисбаланс в системе; поэтому частые корректировки суммы премий стали необходимыми. Баланс системы может быть восстановлен путём изменения правил перехода из одного класса в другой, путём изменения страховых коэффициентов, использующихся при расчёте премии, или же, как обычно и происходит, - путём увеличения премий на определённую величину во всех классах.

Для определения сбалансированной системы необходимо рассмотреть такие компоненты, как частоту исков и размер исков. Изменение одной из этих переменных или же обеих вызывает изменение суммы премии в каждом классе.

Однако в России данные системы не нашли широкого применения по тем или иным причинам. Одной из таких причин является отсутствие единой базы страховых случаев. Клиенты, имеющие на своём счету страховые случаи, могут просто поменять страховую компанию, чтобы не нарваться на понижение в классе.

Целью исследования является построение оптимальных коэффициентов премий, соответствующих двум основным условиям: финансовая устойчивость страховщика и условие прозрачности (чёткое и понятное объяснение назначения конкретной премии к оплате).

Формулировка задачи: зная правила перехода из одного класса в другой, а именно коэффициенты Бонус-Малус (КБМ), принятые в России, определить переходные вероятности, применяя марковские цепи, а также в общем виде определить коэффициенты премий каждого класса, соответствующие условию финансовой устойчивости страховщика.

Теоретическая справка. Процесс, заключающийся в том, что система с дискретным множеством состояний в некоторые моменты времени скачком (мгновенно) перескакивает случайным образом из одного состояния в другое, называется дискретным случайным процессом [1].

Дискретный случайный процесс X=X_k, k - натуральное число, называется марковской цепью, если P(X_{k+1}=j | X_k=i, X_{k-1}=i_{k-1},..., X_0=i_0)=P(X_{k+1}=j | X_k=i) для всех j,i,i_{k-1},...,i_0 из множества E, где E - пространство состояний марковской цепи (т.е. если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния i в любое состояние j не зависит от того, когда и как система оказалась в состоянии i). Данное определение допустимо только для дискретных случайных величин, то есть, когда пространство состояний счётно.

Переходной вероятностью p_{ij}(k) из i-го состояния в j-ое для k-го шага (i=1,...,n; j=1,...,n; k=1,2,...) называется вероятность непосредственного перехода системы в момент t_kиз состояния i в состояние j [1].

Матрица P(k)=(p_{ij}(k)) называется матрицей переходных вероятностей; данная матрица является стохастической. Марковская цепь называется однородной, если p_{ij}(k)≡p_{ij} (и аналогично P(k) $\equiv P$).

Системы Бонус-Малус рассматриваются в качестве однородных марковских цепей с конечным пространством состояний Бонус-Малус классов *E.*

Для моделирования переходных вероятностей в пределах системы бонус-малус используется распределение Пуассона. Оно описывает число исков страхователя, и переходные вероятности определяются из распределения частоты исков.

На рисунке 1 представлены коэффициенты Бонус-Малус, принятые в автостраховании России (источник: постановление правительства РФ №739 от 8 декабря 2005 г. "Об утверждении страховых тарифов по обязательному страхованию гражданской ответственности владельцев транспортных средств, их структуры и порядка применения страховщиками при определении страховой премии").

На рисунке 2 представлена матрица переходных вероятностей для СБМ России. Обозначения, принятые в таблице: 1) . = 0; 2) {k}=p_k=$(\lambda^k e^{-\lambda})/k!; 3)\{k, k+1, ...\} = \sum_{i=k}^{\infty}\mathrm{p}_i$

Рассмотрим портфель застрахованных рисков, который предполагает следующее:

- в данный портфель не могут войти новые страхователи и не могут выйти уже застрахованные

- водители застрахованы в одно и то же время и в целом имеют одинаковые характеристики (возраст, стаж и т.д.)

Пусть N - случайное число исков, предъявленных страхователем в течение одного года, и Y_h (h=1,2...,N) - соответствующая случайная величина размера исков, которые являются случайными независимо распределёнными величинами и не зависимы от N. Суммарный размер исков страхователя может быть записан в следующем виде: X=$\sum_{h=1}^{N}\mathrm{Y}_h$.

Предположим, что среднее число исков равно 1. Ежегодное количество исков страхователя представляет собой случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром λ.

Этот параметр меняет своё значение от страхователя к страхователю. Имеет гамма распределение с параметрами $\alpha и \beta$.

Функцию плотности гамма распределения обозначим через u(λ).

Таким образом, суммарное количество исков имеет отрицательное биномиальное распределение [2].

Будем полагать, что все страхователи разделены на конечное число классов СБМ (i=*1,2,...,s*), все переходы страхователей в которых регулируются определёнными правилами. При назначении класса для каждого страхователя учитываются класс, в котором он находился в течение предыдущего года, а также число исков, предъявленных этим страхователем в течение года.

В первый год страхования все страхователи помещаются в один и тот же класс, скажем класс η.

Для каждого следующего назначенного класса определим коэффициент премии c_i, представляющий собой отношение премии, соответствующей назначенному классу, к премии, соответствующей исходному классу.

Правила перехода из одного класса в другой могут быть представлены в виде переходов T_k таких, что T_k(i)=j , если страхователь перемещается из класса i в класс j в случае предъявления k исков.

Данная система является марковской цепью первого порядка с матрицей переходов вида:

$\mathrm{M}(\lambda) = (\mathrm{p}_{ij}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{p}_k(\lambda)\mathrm{T}_k$,

где под интегралом указана вероятность перехода из одного класс в другой в течение одного года. Определим величину $a_i(\lambda)$.

Это предельное значение вероятности того, что страхователь окажется в i-ом классе, когда число лет стремится к бесконечности.

В исходном портфеле страховщика стационарные вероятности имеют вид:

a_i=$\int_0^{\infty}\mathrm{a}_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda, i = 1, ..., s$

Таким образом, в системе Бонус-Малус стационарное распределение представляет собой долю водителей, находящихся в разных классах системы, в течение продолжительного времени действия СБМ.

Как только система определена, размер премии π_i(t) для каждого водителя в i-ом классе в каждый год t определяется как произведение базовой премии B_t^P и коэффициента корректировки c_i; таким образом, водитель, находящийся в i-ом классе, платит премию π_i(t)=B_t^P*c_i [3].

Относительно всего портфеля средняя премия для каждого года рассчитывается путём произведения базовой премии B_t^P и среднего коэффициента премии C_m(t):

C_m(t)=$\sum_{i=1}^{s}\int_0^{\infty}\mathrm{c}_i\mathrm{p}_i(\lambda;t)u(\lambda)d\lambda$,

Под интегралом указана вероятность того, что страхователь находится в i-ом классе на протяжении t лет.

Для того чтобы определить значение c_i, необходимознатьзначениеC_m(t).

В году t система становится финансово устойчивой, если суммарный объём средних премий соответствует суммарному объёму ожидаемого количества исков; тогда верно следующее равенство:

$\overline{\lambda}$ =C_m(t)*B_t^P (t=0,1,2,...)

Вывод: в процессе исследования получены переходные вероятности из одного класса в другой системы Бонус-Малус, принятой в России. В общем виде определены коэффициенты премий, удовлетворяющие условию финансовой устойчивости страховщика.

Литература

1. Лабскер Л.Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области – М.: Альпина Паблишер, 2002. – 224 с.

2. Lemaire, J. Bonus-Malus systems in automobile insurance. Kluwer-Academic Publishers, Boston, - 1995. (Русский перевод книги: Ж. Лемер. Системы бонус-малус в автомобильном страховании. – М : Янус-К, 2003)

3. F. Baione, S. Levantesi, M. Menzietti. The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market. Department of Actuarial Science, University “La Sapienza”, Rome, Italy, - 1994

Иллюстрации

СБМ России[1]

Класс на начало срока страхования	Коэффициент (КБМ)	Класс по окончании годового срока страхования				
		0 выплат	1 выплата	2 выплаты	3 выплаты	4 и более выплат
М	2,45	0	М	М	М	М
0	2,3	1	М	М	М	М
1	1,55	2	М	М	М	М
2	1,4	3	1	М	М	М
3	1	4	1	М	М	М
4	0,95	5	2	1	М	М
5	0,9	6	3	1	М	М
6	0,85	7	4	2	М	М
7	0,8	8	4	2	М	М
8	0,75	9	5	2	М	М
9	0,7	10	5	2	1	М
10	0,65	11	6	3	1	М
11	0,6	12	6	3	1	М
12	0,55	13	6	3	1	М
13	0,5	13	7	3	1	М

Рис. 1: Рис. 1

Матрица переходных вероятностей СБМ России

i/j	M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M	{1,2…}	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	{1,2,…}	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	{1,2,…}	.	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	{2,3,…}	.	{1}	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	{2,3,…}.	.	{1}	.	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	{3,4,…}	.	{2}	{1}	.	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.	.
5	{3,4,…}	.	{2}	.	{1}	.	.	{0}	.	.	.	.	.	.	.
6	{3,4,…}	.	.	{2}	.	{1}	.	.	{0}	.	{1}	.	.	.	.
7	{3,4,…}	.	.	{2}	.	{1}	.	.	.	{0}	.	.	.	.	.
8	{3,4,…}	.	.	{2}	.	.	{1}	.	.	.	{0}	.	.	.	.
9	*{4,5,…}*	.	{3}	{2}	.	.	{1}	.	.	.	.	{0}	.	.	.
10	*{4,5,…}*	.	{3}	.	{2}	.	.	{1}	.	.	.	.	{0}	.	.
11	*{4,5,…}*	.	{3}	.	{2}	.	.	{1}	.	.	.	.	.	{1}	.
12	*{4,5,…}*	.	{3}	.	{2}	.	.	{1}	.	.	.	.	.	.	{0}
13	*{4,5,…}*	.	{3}	.	{2}	.	.	.	{1}	.	.	.	.	.	{0}

Рис. 2: Рис. 2